Historia de la resolución de ecuaciones polinómicas con una incógnita de grado uno, dos, tres, cuatro y cinco

Ana Melissa Cerdas Valverde
Universidad de Costa Rica
ana.melissa.cerdas@ucr.ac.cr
Ana Mirieth Fernández Castro
Universidad de Costa Rica
anamirieth.fernandez@ucr.ac.cr
Estibaliz Odilie Rojas Quesada
Universidad Estatal a Distancia
erojasq@uned.ac.cr

Resumen
Este trabajo se basa en los resultados obtenidos en el proyecto de investigación que lleva por nombre La Historia de la Resolución de Ecuaciones Polinómicas con una Incógnita de grado uno, dos, tres, cuatro y cinco. En el, se examina la evolución que ha tenido la solución de dichas ecuaciones polinómicas en las civilizaciones antiguas y algunos matemáticos de la época, con el fin de comprender los aspectos más relevantes que acontecieron al tema en estudio y así determinar la imposibilidad de encontrar una solución general para la ecuación de grado cinco utilizando únicamente operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división), la potenciación y la radicación.

Palabras claves:
Ecuaciones polinómicas, historia de las ecuaciones, civilizaciones antiguas, resolución de ecuaciones.

Introducción

En los inicios de la historia, el álgebra estaba prácticamente confinada a la resolución de ecuaciones y el desarrollo de diversas teorías, en función de las civilizaciones y los matemáticos de la época; mismos que lograron dar solución a diferentes tipos de ecuaciones en relación con las necesidades sociales y económicas del período.

Dichos logros se encuentran plasmados en distintos escritos que resumen los problemas originarios en encontrar la solución a las ecuaciones polinómicas de primer, segundo, tercer y cuarto grado. Por esta razón, los matemáticos de la época dedicaron sus estudios a brindar respuestas generalizadas a dichas ecuaciones, con el objetivo de formalizar los problemas presentados y justificar su implementación.

Por lo tanto, al intentar conocer la parte histórica se puede ver la matemática como "una materia acumulativa que crece desde su propio seno, en donde lo nuevo viene a ser una extensión de lo viejo, de lo ya conocido" (Lupiannez, 2002, p. 60).

Así lo menciona Godino (2004) al expresar que

> la perspectiva histórica muestra claramente que las matemáticas son un conjunto de conocimientos en evolución continua y que en dicha evolución desempeña a menudo un papel de primer orden, la necesidad de resolver determinados problemas prácticos (o internos a las propias matemáticas) y su interrelación con otros conocimientos. (p. 21 y 22)

Con base en lo anterior, este trabajo consiste en examinar la evolución que ha tenido la resolución de ecuaciones polinómicas con una incógnita de grado uno, dos, tres y cuatro, con el fin de comprender los aspectos más relevantes que acontecieron al tema en estudio y así determinar la imposibilidad de encontrar una solución general para las ecuaciones de quinto grado, utilizando únicamente las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división), la potenciación y la radicación (empleando radicales).

De esta manera, se procura que el lector y la lectora puedan comprender el desarrollo de la solución de las ecuaciones polinómicas con una incógnita de grado uno, dos, tres, cuatro y cinco, así como, contar con una forma alternativa, como lo son las notas historicas, que le puede permitir enseñar las ecuaciones polinómicas empleando los resultados obtenidos.

Marco Teórico

Ecuación de grado 1

Civilizaciones antiguas como los chinos, egipcios, babilonios y árabes, al buscar solución a situaciones de la vida cotidiana dieron origen a la ecuación lineal, pues la empleaban en actividades como la agrimensura, repartición de bienes, medidas de terrenos, entre otros.

A continuación, se examinará la evolución que ha tenido la solución de la ecuación polinómica con una incógnita de primer grado por algunas de estas civilizaciones, con el objetivo de conocer el aporte brindado por cada una de ellas.

Civilización Egipcia

Los egipcios fueron una civilización que se dedicó en gran parte a la agricultura, debido a esto los aportes en matemática están vinculados a transacciones comerciales, edificaciones, cálculo de superficies, medidas de terrenos y a diversos asuntos de naturaleza práctica, en las que destacaban problemas de geometría, álgebra y proporciones. Estos conocimientos fueron plasmados en dos documentos: *el Papiro de Moscú* (1650 a. C.) y *el Papiro de Rhind* (1800 a. C.), este último conocido también como el papiro de Ahmes, escriba autor de la obra.

En el papiro de Rhind, se describe por primera vez el método de la “regula falsi”, o método de la falsa posición, donde se dan varios ejemplos de su uso, y se tratan problemas que actualmente se resuelven con ecuaciones lineales, pero antes empleaban dicho método, el cual consiste en calcular el valor buscado a partir de uno estimado, es decir, “se empieza por un valor supuestamente falso:

1. Presuponer la respuesta
2. Verificar
3. Ajustar. (Perero, 1994, p. 131)

Un ejemplo del papiro de Rhind, donde se aplica dicho método es: “La suma de un número y un séptimo de dicho número es 24. ¿Cuál es el número?”(Perero, 1994, p. 131).

Con el método de la falsa posición se seguirían los siguientes pasos:

1. Elegir un número conveniente, en este caso 7 (ya que un séptimo de 7 es 1)
2. Verificar para ese número, en este caso $7+7/7=8$
3. Ajustar: Puesto que 8 debe multiplicarse por 3 para llegar a 24, habrá que multiplicar también 7 (el número elegido es 1) por 3 para tener la respuesta correcta; $7\times 3=21$. (Perero, 1994, p. 131)

En notación algebraica actual, se resolvería la ecuación $x+\frac{x}{7}=24$.

Otro problema del papiro corresponde a:

> Problema 24: Una cantidad más $\dfrac{1}{7}$ de la misma da un total de 19. ¿Cuál es la cantidad? (Pulpón, s.f, p. 19).

El problema planteado en notación moderna se limita a resolver la ecuación $x+\frac{x}{7}=19$. A diferencia del anterior, se detallará más el procedimiento empleado por el escriba Ahmes.

1. Se da un valor estimado, es decir $x=7$.
2. Se evalua el valor estimado en la función, es decir, se calcula $7+\frac{7}{7}=8$.
3. Para averiguar el valor real encuentra un número N, tal que al multiplicarlo por el resultado de aplicar el valor estimado se obtenga 19, es decir, Ahmes divide $\frac{19}{8}$. Lo cual, se puede evidenciar como
$$N\cdot 8=19\Longrightarrow N=\frac{19}{8}.$$
4. De modo que el valor buscado es $7\cdot N$.
5. Se obtiene $x=7\cdot N=7\cdot\frac{19}{8}$. El problema es que los egipcios sólo aceptaban fracciones unitarias, por lo tanto escribían $\frac{19}{8}$ como $2\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}$. Así $x=7\cdot\left(2\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\right)=16\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{8}$

Un tercer problema, donde se ejemplifica el álgebra elemental moderna es el Problema 26 del papiro de Rhind, que dice: “La suma de una cantidad y su cuarta parte es 15. ¿Cuál es esa cantidad?”(Gheverghese, 1991, p. 121).

Planteado en notación moderna se traduce en resolver la ecuación
$x+\frac{1}{4}x=15$.

Es importante considerar que el método de la regla de la falsa posición, marca los inicios de lo que puede considerarse como un algoritmo para la solución de una ecuación lineal de la forma $x+ax=b$, lo cual podría visualizarse como $dx=b$, donde $d=(1+a)$.

En lo que respecta al papiro de Moscú, se encuentran otros problemas con ecuaciones sencillas que utilizan variantes del método mencionado.

Cabe destacar que los problemas y su respectiva solución, planteadas en el papiro de Rhind, se realizaban sin el empleo de una notación simbólica como la que es utilizada actualmente, ya que, “la introducción de las letras y del simbolismo se da en los siglos XVI y $XVIII$”(Babini, 1970, p. 32).

Civilización Babilónica

A diferencia de los egipcios, que se vieron frenados por la ausencia de un sistema de numeración eficaz, los babilonios disponían de un sistema de numeración con valor posicional y utilizaban diversas clases de tablas al realizar cálculos básicos.

De manera que tenían una extraordinaria destreza algebraica fundada en el conocimiento, sobre la base de reglas empíricas, de las relaciones entre dos números y su suma, diferencia, producto, cuadrado de la suma y cuadrado de la diferencia. Lo anterior se evidencia en los problemas de primero y segundo grado, con casos numéricos particulares, que esas tablillas contienen y su solución.

En el periodo temprano denominado Antiguo Imperio babilónico gobernado por Hammurabi (1792-1750 a. C.) durante los años 1900-1650 a. C., se dio los comienzos del álgebra babilónica. La resolución de las ecuaciones de la forma $ax = c$ no difiere de la actual, la cual es $x = \frac{1}{a}c$. Los babilonios "tomarían $\frac{1}{a}$ de una tabla de inversos y obtendrían el producto refiriéndose a una tabla de multiplicación. Si $\frac{1}{a}$ no fuese una fracción sexagesimal regular, utilizarían una aproximación conveniente"(Gheverghese, 1991, p. 159).

Un ejemplo perteneciente a dicho periodo, donde se ilustra la aproximación corresponde a[1]:

> Si te piden que multipliques dos tercios de (tu parte) por dos tercios de (la mía) más 100 qa de cebada para obtener mi parte entera, ¿cuál es (mi) parte?
>
> Solución sugerida: (Supóngase que ambas partes son iguales)
>
> 1. Primero, multiplicar dos tercios por dos tercios: Resultado $0;26,40$ (esto es, $4/9$).
> 2. Restar $0;26,40$ de 1: Resultado $0;33,20$ (esto es, 5/9).
> 3. Tomar el inverso de $0;33,20$: Resultado $1;48$ (esto es, 1+4/5).
> 4. Multiplicar $1;48$ por $1,40$ (esto es, 100): Resultado $3,0$ (esto es, 180).
>
> Mi parte es 3 qa de cebada (Gheverghese, 1991, p. 159).

En notación actual, el procedimiento para resolver la ecuación consistiría en:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)x+100 &= x \\ \frac{4}{9}x+100 &= x \\ \frac{5}{9}x &= 100 \\ x &= 180 \end{aligned}$$

Es importante mencionar, que en los textos babilónicos que se refieren únicamente a problemas, "los datos tienen valores numéricos concretos no dan lugar a dudas en cuanto a la generalidad de

[1]Según Gheverghese (1991) el enunciado del problema y su solución se basan en la traducción de Taha Baqir (1950).

las reglas empleadas, e indican una habilidad técnica considerable en el manejo de las ecuaciones de primer y segundo grado"(Bourbaki, 1976, p. 74).

En cuanto a los aportes a las ecuaciones de segundo grado, se especificarán mas adelante.

Civilización Árabe

Por su parte, los árabes también emplearon el método de la posición doble para dar solución a ecuaciones de la forma $ax+b=0$, luego lo modificaron y lo renombraron como el Método a Escalas[2], el cual parte de la misma solución que el método anterior, es decir, $x=\dfrac{f_1g_2-f_2g_1}{f_1-f_2}$.

El nombre de este método se deriva de la siguiente figura:

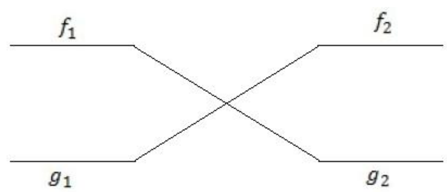

Figura 1: Método a Escalas

Además, el matemático árabe Al-Khwarizmi (780-850) distinguió la ecuación $bx=c$, para ello utilizaba ciertos convenios de palabras, por ejemplo, la cantidad incógnita x se denominaba "raíz" o "cosa", y a la constante, "número". Así, la ecuación anterior era del tipo "raíces iguales a números"(Gheverghese, 1991, p. 436).

Civilización India

Un interesante aspecto de la matemática hindú es la utilización de un lenguaje poético y metafórico, muchas veces en verso, para escribir la matemática.

Dos ejemplos del libro Liláwati (la hermosa), del matemático hindú Bháskara (S. VIII), donde se emplea para su solución la ecuación lineal, son los siguientes:

1. "De un ramo de flores de loto, se ofreció la sexta parte a cada uno de los dioses Siva, Vishnú y el Sol; una cuarta parte se le dio al amigo, Bhavani, y las seis flores restantes se entregaron al venerable preceptor. Dime, rápidamente, ¿cuál es el número total de flores?"

[2] La Figura 1.1 explica el nombre del método y es tomada del libro *"Solución Numérica de Ecuaciones Algebraicas"*.

(Doroteo, Navarro, Chacón y Arroyo, 2007, p. 11). Planteado en notación moderna se traduce en resolver la ecuación
$\frac{x}{6}+\frac{x}{6}+\frac{x}{6}+\frac{x}{4}+6=x.$

2. "En una lucha amorosa se quebró un collar; un tercio de las perlas cayó al suelo, un quinto quedó en el lecho, la joven encontró un sexto y su amigo recuperó un décimo de las perlas; en el hilo sólo quedaron seis perlas. ¿Cuántas perlas había en el collar?"(Perero, 1994, p. 144).
   Su solución correspondería a resolver la ecuación $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}+\frac{x}{6}+\frac{x}{10}+6=x.$

Otro problema Indio, es el propuesto por el matemático Mahavira (ca. 850), el cual planteó a sus discípulos:

El rey se llevó $1/6$ de los mangos que había en una cesta, la reina tomó $1/5$ del resto y los tres príncipes se llevaron respectivamente $1/4$, $1/3$ y $1/2$ de los que iban quedando en la cesta, al príncipe más joven le tocaron solo 3 mangos. ¿Cuántos mangos había en la cesta? (Perero, 1994, p. 146).

El método de solución empleado por Mahavira, es similar al que se utiliza actualmente, es decir, si y representa el número de mangos que hay en la cesta, el rey se llevó $\frac{1}{6}y$, de modo que queda $\frac{5}{6}y$ en la cesta; ahora si la reina se llevó $\frac{1}{5}y$ del resto, entonces tiene $\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6}\right)y=\frac{1}{6}y$; quedando $\frac{4}{6}y$. El primer príncipe saca $\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{6}\right)y=\frac{1}{6}y$, quedando $\frac{3}{6}y$, siguiendo el mismo procedimiento para el segundo príncipe, finalmente, le quedan al más joven $\frac{1}{6}y=3$, de donde $y=18$.

Otro importante aporte de los hindúes, corresponde a la regla de tres, dicho método permite encontrar el cuarto término de una proposición cuando se conocen tres magnitudes. Fue introducido a la matemática por Aryabhata (n. 476 d.C.) en el año 499, éste se encontraba escrito en verso en el libro Aryabhatuya, presentado así: "En la regla de tres, multiplicar el fruto por el deseo y dividir por la medida; el resultado es el fruto del deseo"(Perero, 1994, p.145).

Lo anterior, se traduce a escribir: $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$, entonces $x=\frac{b\cdot c}{a}$. Donde a es la medida, b es el fruto, c es el deseo y x es el fruto deseado.

Un ejemplo de dicho libro, donde se empleaba la regla de tres, es el siguiente: "Si dos medidas y media de azafrán cuestan $3/7$ de una moneda, ¿Cuántas medidas de azafrán se podrán comprar con nueve monedas?"(Perero, 1994, p. 145).

Actualmente, se resolvería mediante la ecuación

$$\frac{x}{9}=\frac{(5/2)}{(3/7)}$$

Sin embargo, con la terminología india se tendría: " $5/2$ es el fruto, 9 es el deseo, $3/7$ es la medida; el fruto del deseo será: $(9)(5/2)/(3/7)=52$ y $1/2$"(Perero, 1994, p. 145).

Un rasgo importante de la antigua álgebra india que la distingue de otras tradiciones matemáticas fue el uso de símbolos, como un punto o las letras del alfabeto, para denotar las cantidades incógnitas. Por ejemplo, un término general para cualquier incógnita fue "yavat tavat, que se acortó hasta el símbolo algebraico ya"(Gheverghese, 1991, p. 369).

Civilización Griega

Por otra parte, los griegos también realizaron estudios con respecto a la solución de la ecuación lineal. Lo anterior se encuentra escrito en una antología compilada por el gramático romano Metrodoro en la cual se hace mención a un artificio aritmético que se encuentra plasmado en la tumba de Diofanto, con el que se puede escribir una ecuación lineal para encontrar la edad de este matemático.

La inscripción que figuraba en su tumba dice:

> Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto. Un sexto de su vida transcurrió en la niñez y un doceavo en la adolescencia; después de transcurrir otro séptimo de su existencia se casó; a los 5 años de casado nació su hijo; pero el hijo vivió la mitad de la vida de su padre y éste, afligido, buscó consuelo en la ciencia de los números; pero 4 años después de la muerte de su hijo, el padre falleció (Perero, 1969, p. 142).

La traducción al lenguaje matemático corresponde a la ecuación lineal:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$$

De donde se obtiene que Diofanto murió a la edad de 84 años.

Ecuación de grado 2

Al igual que en la ecuación de grado uno, las civilizaciones egipcia, babilónica, árabe, hindú y china, resolvieron problemas haciendo uso de la ecuación cuadrática[3]. A diferencia de la anterior, los griegos también la trabajaron.

Un aspecto importante, es que las distintas civilizaciones lo realizaron en diferentes momentos, pues por ejemplo, "mientras los egipcios estaban estudiando todavía las ecuaciones lineales, los babilonios ya podían resolver muchas ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado"(Tomber, 1970, p.244).

[3]La palabra "cuadrática"proviene del latín *quadratum* que significa cuadrado.

A continuación, para una mejor comprensión de los aportes brindados por algunas de estas civilizaciones referente a las ecuaciones de segundo grado, se examinará su evolución.

Civilización Egipcia

Los egipcios, además de resolver ecuaciones lineales, lograron dar solución a dos problemas que parecen implicar ecuaciones simultáneas con términos como x^2 y xy, según Gheverghese (1991), los cuales se encuentran plasmados en el papiro de Berlín (2200-1700 a. C.).

Seguidamente, se presenta uno de los problemas el cual dice así: "Te dicen que el área de un cuadrado de 100 (cúbitos cuadrados) es igual a la de dos cuadrados más pequeños. El lado de uno de los cuadrados es $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ del otro. Dime los lados de los dos cuadrados desconocidos"(Gheverghese, 1991, p. 122).

Lo anterior, expresado mediante el álgebra simbólica es:

$$\begin{cases} x^2 & + & y^2 & = & 100 \\ 4x & - & 3y & = & 0 \end{cases},$$

donde x e y son los lados de los dos cuadrados más pequeños.

Por lo tanto, se evidencia que los egipcios utilizaron sistemas cuadráticos en dos incógnitas, pero reducible a una ecuación lineal. Actualmente, las soluciones se pueden obtener por el método de sustitución, dando así $x=6$ e $y=8$.

A pesar de que hoy se resuelva a través de dicho método, los egipcios empleaban una aproximación mediante el álgebra retórica, es decir, las reglas diseñadas para resolver problemas acerca de números se expresaban oralmente, y "consistía en instrucciones detalladas acerca de lo que había que hacer para obtener la solución de un problema"(Gheverghese, 1991, p.119).

De manera que su solución se expresaría así: Se toma un cuadrado de lado 1 cubito. Entonces, el lado del otro cuadrado será $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ cúbitos. Las áreas de los cuadrados más pequeños son 1 y $\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$ cúbitos cuadrados. Juntos tienen un área de $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$. Posteriormente se encuentra la raíz cuadrada de esta suma $1+\frac{1}{4}$. Luego, se hace la raíz cuadrada de 100, que es 10.

Por último, se divide estos 10 por $1+\frac{1}{4}$ dando 8 cúbitos, el lado de un cuadrado. Se calcula $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ de 8 y da 6 cúbitos, el lado del otro cuadrado más pequeño (Gheverghese, 1991, p.122).

Civilización Griega

Los griegos ocupan un lugar destacado en la historia de las matemáticas, entre otras razones, por ser los primeros que perciben la necesidad de las demostraciones. Por ejemplo, Thales de Mileto (624-547 a.C.), padre de la filosofía jónica, considerado el primer filósofo y el primer matemático, comprendió la necesidad de ofrecer una justificación teórica (demostración) de los distintos resultados.

Se inicia lo que se ha denominado un *"álgebra geométrica"*, en cuanto comprende construcciones geométricas que equivalen a la resolución de ecuaciones o transformaciones algebraicas particulares. Esta forma de álgebra sustituyó al *"álgebra aritmética"* de las civilizaciones anteriores.

El procedimiento geométrico que permite resolver estas ecuaciones se denomina *aplicación de áreas*. Su uso se expone extensamente en el *Libro II de los Elementos de Euclides*. Asimismo, se presenta que los números son sustituidos por segmentos, el producto por el área de un rectángulo, el producto de tres factores por el volumen de un prisma, la suma de dos números por la prolongación de un segmento, la resta se interpreta como resta de segmentos y la división como la razón entre segmentos.

Por ejemplo, en el libro II, Proposición 5 se encuentra la identidad

$$(a+b)(a-b)+b^2=a^2.$$

Donde a partir de este resultado se puede resolver geométricamente la ecuación $ax-x^2=b^2$, si $a>2b$. Para dicha solución se construye la figura[4]

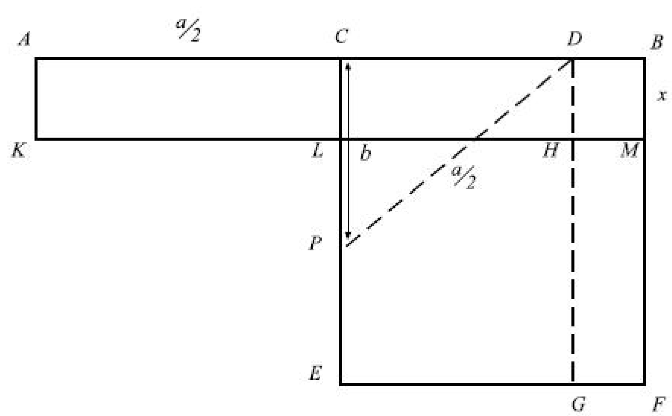

Figura 2: Solución geométrica para la ecuación $ax-x^2=b^2$

Análogamente, partiendo de la Proposición 6 del Libro II, que establece en términos actuales la identidad $(2a+b)b+a^2=(a+b)^2$, se puede resolver geométricamente la ecuación $ax+x^2=b^2$; en otras proposiciones también se trabajan ecuaciones de segundo grado de una forma geométrica.

[4]Tomado de *"La Cresta del Pavo Real."*

Civilización India

En la India, las ecuaciones de segundo grado hacen su primera aparición en los escritos llamados Sulbasutras, en las formas $ax^2+bx=c$ y $ax^2=c$. Sin embargo, no se da la solución para una ecuación de la forma $ax^2+bx-c=0$, la cual se presenta en el manuscrito de *Bakhshali*. Es importante mencionar, que la solución ahí expuesta, es lo que hoy en notación moderna se conoce como:

$$x=\frac{\sqrt{(b^2-4ac-b)}}{2a}$$

Además, otro aspecto relevante, es que la primera formulación escrita de una regla general aparece en una obra de Sridhara (ca. 900), la cual aunque se extravió, se logró ubicar en algunas citas de Bhaskaracharya (n. 1114) y otros autores. Dicha regla es la siguiente:

> Multiplíquese los dos miembros [de la ecuación] por una cantidad igual a cuatro veces el coeficiente del cuadrado de la incógnita; súmese a ambos miembros una cantidad conocida igual al cuadrado del coeficiente de la incógnita y luego [extráigase] la raíz cuadrada (Gheverghese, 1991, p. 371).

Lo anterior se obtiene al considerar la ecuación cuadrática $ax^2+bx=c$, transformándola al multiplicar los dos miembros por $4a$, sumando b^2 y finalmente extrayendo la raíz cuadrada, lo cual es una variable de la solución anterior.

Según Gheverghese (1991), no existen datos de que Sridhara utilizara ambos signos del radical, aunque Mahavira (ca. 850) conoció ciertamente ambas posibilidades. La solución dada por Sridhara (en notación moderna) es

$$x=\frac{\frac{-b}{a}\pm\sqrt{(\frac{b}{a}-4\frac{c}{b})\frac{b}{a}}}{2}$$

A continuación, se considera un problema acerca de ecuaciones cuadráticas, ideado por Aryabhata en cuya solución se utiliza el método de la *inversión algebraica*, es decir, la sustitución de la operación original por su inversa.

> Si entendiste bien el método de inversión, dime, hermosa niña de ojos radiantes, ¿cuál es el número que multiplicado por 3, aumentado en las $3/4$ partes del producto, dividido despúes por 7 y disminuido en $1/3$ del cociente, multiplicado por sí mismo, restándole 52, extrayendo la raíz cuadrada, sumándole 8 y dividiéndole por 10, da el número 2 (Perero, 1994, p. 145).

Para dar solución a dicho problema, se comienza por la respuesta, que en este caso es 2, y se resuelve en sentido inverso, es decir, como el problema dice dividido por 10, entonces se multiplica por ése número; donde dice que se le suma 8, se le resta 8, y así sucesivamente.

Por tanto, el número original se obtiene al hacer

$$[(2)(10)-8]^2+52=196$$

$$\sqrt{196}=14$$

$$\frac{14(\frac{3}{2})\cdot(7)\cdot(\frac{4}{7})}{3}=28$$

Por su parte, Bhaskaracharya plantea el siguiente ejemplo, que dice así:

> De un enjambre de abejas, un número igual a la raíz cuadrada de la mitad de su número total se fue a libar en flores de loto. Poco después, $\frac{8}{9}$ del enjambre total se fue al mismo lugar. Un zángano engañado por la fragancia de la flor de loto se introdujo en ella. Pero cuando estaba en su interior, cayó la noche, se cerró el loto y la abeja quedo atrapada dentro. A su zumbido, su consorte respondió ansiosamente desde el exterior ¡Mi querida niña! ¿Cuántas abejas hay en el enjambre? (Lilavati de Bhaskaracharya) (Gheverghese, 1991, p. 372).

La aproximación de Bhaskaracharya es equivalente a resolver la ecuación

$$\sqrt{\frac{1}{2}x}+\frac{8}{9}x+2=x$$

Donde x es el número total de abejas en el enjambre. Se supone a partir de los datos que se dan, que el zángano y su consorte son miembros retrasados del mismo enjambre, de ahí el 2 en la ecuación anterior. Por tanto, sólo $x=72$ es una solución admisible.

No obstante, el siguiente problema del Bijaganita Bhaskaracharya admite que son válidas más de una solución, dice así:

> En un bosque, un número de monos igual a la octava parte de los monos totales de una manada están jugando ruidosamente. Los 12 monos restantes, que están en actitud más seria, están en una colina cercana y se irritan con los gritos que viene del bosque, ¿Cuál es el número total de monos de la manada? (Gheverghese, 1991, p. 373).

Para este caso, las soluciones $x=16$ y $x=48$ son igualmente aceptables, según Bhaskaracharya.

Asimismo, el matemático indio del siglo *IX* llamado Mahavira (ca. 850), en su libro *Ganita Sara Samgraha* incluye sus contribuciones al dar soluciones de diferentes tipos de ecuaciones de segundo grado. (Gheverghese, 1991, p. 364)

Ecuación de grado 3

El desarrollo histórico de la ecuación de grado tres, no puede atribuirse a una sola persona, ni a una época determinada, pues civilizaciones como los babilonios y los árabes trabajaron en su solución. Sin embargo, el aporte de los italianos en el siglo XVI es el más relevante, pues fueron quienes realizaron una importante labor para encontrar una fórmula general.

Italia en el siglo XVI

Por otro lado, es importante destacar que a principios del siglo XIII el matemático italiano Leonardo Fibonacci consiguió encontrar una aproximación cercana a la solución de la ecuación cúbica $x^3+2x^2+x=d$.

Sin embargo, albores del siglo XV no se había logrado encontrar una solución general para la ecuación de tercer grado, los matemáticos consideraban prácticamente imposible resolver ecuaciones de grado superior al segundo, al decir de Luca Pacioli, con los métodos entonces disponibles.

En su obra *Summa de aritmética, geometría, proportioni et proportionalita* expresa al respecto: "Diría que el arte (el álgebra) a tal caso todavía no ha dado modo (solución) así como todavía no ha dado modo al cuadrar del círculo"(Gutiérrez, 2007, p. 91). Es decir, es tan difícil resolver una ecuación de tercer grado como la cuadratura del círculo.

A principios del siglo XVI un matemático de Bolonia, Scipione del Ferro, resolvió cúbicas del tipo cubo más cosa igual a número, expresado como

$$x^3+ax=b \tag{1.8}$$

Pero él nunca publicó su solución pues era frecuente que los profesores de las universidades se retaran públicamente a resolver o discutir cualquier problema, asunto o tema, con el fin de ganar prestigio, un premio económico o incluso la misma cátedra de la universidad. Poco antes de morir se la comunicó a su yerno Annibale Della Nave y a uno de sus alumnos, Antonio María del Fiore, al cual le dio la regla pero no la prueba.

Su razonamiento puede ser explicado del modo siguiente: Si α fuese una raíz de (1.8), entonces existen y, z, los cuales se pueden escribir de la forma

$$\alpha=y+z\ ,\ yz=\frac{-p}{3}$$

Resultando que

$$\alpha^3=(y+z)^3=y^3+z^3+3(y^2z+yz^2)=y^3+z^3+3\alpha yz$$

Sustituyendo los respectivos valores de α en la ecuación $\alpha^3+\alpha p+q=0$ se obtiene

$$\begin{aligned} y^3+z^3+3\alpha yz+p\alpha+q &= 0 \\ y^3+z^3+\alpha(3yz+p)+q &= 0 \quad (1.9) \end{aligned}$$

La igualdad $yz=\frac{-p}{3}$ al sustituirla en (1.9) se obtiene que $y^3+z^3=-q$, y al despejar z de $yz=\frac{-p}{3}$ y elevarlo al cubo implica que $z^3=\frac{-p^3}{27y^3}$. Por ende,

$$\begin{aligned} y^3-\tfrac{p^3}{27y^3} &= -q \\ y^6+qy^3-\tfrac{p^3}{27} &= 0 \\ (y^3)^2+qy^3-\tfrac{p^3}{27} &= 0 \end{aligned}$$

Ahora aplicando la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas, se obtiene

$$y^3=\frac{1}{2}\left(-q\pm\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}\right) \tag{1.10}$$

Por otro lado $z=\frac{-p}{3y}$. Con estos datos se puede hallar una raíz α de (1.8).

Para resolver la ecuación

$$x^3-15x-126=0 \qquad (1.11),$$

al ser de la forma $x^3+px=q$, se tiene que $p=-15$ y $q=-126$, de acuerdo a (1.10)

$$y^3=\frac{1}{2}\left(-(-126)\pm\sqrt{(-126)^2+\frac{4(-15)^3}{27}}\right)$$

Por lo tanto $y^3=125$ ó $y^3=1$. Si se le elige la primera opción, se obtiene $y=5$ y $z=-\frac{-15}{(3)(5)}=1$.

Esto remite a que

$$\alpha=y+z=5+1=6$$

es una raíz de la ecuación (1.11). Las demás raíces se obtienen resolviendo la ecuación cuadrática

$$\frac{(x^3-15x-126)}{(x-6)}=x^2+6x+21=0$$

en este caso son raíces complejas $-3\pm2\sqrt{3}i$.

Es importante notar que si se hubiera elegido $y^3=1$, entonces se habría obtenido $z=5$, con lo cual se llegaría al mismo resultado $\alpha=6$.

La razón por la que el método del profesor del Ferro soluciona cualquier ecuación de tercer grado es como sigue. Al sustituir $x=y-\frac{a}{3}$ en la expresión

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \tag{1.12}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}
(y-\tfrac{a}{3})^3+a(y-\tfrac{a}{3})^2+b(y-\tfrac{a}{3})+c &= 0\\
y^3-\tfrac{3y^2a}{3}+\tfrac{3ya^2}{3^2}-\tfrac{a^3}{3^3}+ay^2-\tfrac{2a^2y}{3}+\tfrac{a^3}{3^2}+by-\tfrac{ba}{3}+c &= 0\\
y^3+y^2(-a+a)+y(\tfrac{a^2}{3}-\tfrac{2a^2}{3}+b)-\tfrac{a^3}{3^3}+\tfrac{a^3}{3^2}-\tfrac{ba}{3}+c &= 0\\
y^3+y(\tfrac{-a^2}{3}+b)+\tfrac{2a^3}{27}-\tfrac{ba}{3}+c &= 0 \quad (1.13)
\end{aligned}$$

Al hacer $p=b-\dfrac{a^2}{3}$ y $q=-\left(\dfrac{2a^3}{27}+\dfrac{ba}{3}+c\right)$, la ecuación (1.13) se puede escribir de la forma $y^3+py+q=0$. Nótese que si α es una raíz de esta última ecuación, entonces $\alpha+\dfrac{a}{3}$ es una solución de (1.12).

Por otra parte, años después de la muerte del Ferro en 1526, el creciente interés que se daba por encontrar solución a la ecuación de tercer grado, llevó a un maestro calculista veneciano, Niccolò Fontana, de sobrenombre Tartaglia (tartamudo en italiano), a descubrir la regla general en 1541. El problema fue que pasó por alto las ecuaciones que tenían raíces no reales.

Del Fiore se da cuenta de la hazaña de Tartaglia, y le trata de impostor, pues aseguraba que él si tenía una fórmula para resolver la ecuación cúbica que le había entregado su maestro Scipione dal Ferro, treinta años antes.

Como Tartaglia insistió en su capacidad para resolver las ecuaciones cúbicas de los tipos:

1. $x^3+px=q$
2. $x^3=px+q$
3. $x^3+q=px$

con $p>0$ y $q>0$, se planteó el desafío. Cada contrincante debía de resolver treinta problemas propuestos por su oponente, en donde el plazo máximo para solucionarlos era de cuarenta días.

Mientras del Fiore no supo resolver ni uno sólo de los problemas, Tartaglia los resolvió todos en menos de dos horas, por lo que su fama se ve acrecentada y llega a conocimiento de Gerolamo Cardano (1501-1566), el cual lo busca y usa todos los medios posibles para persuadir a Tartaglia, y así este le proporcione la fórmula.

Finalmente en 1539, en una visita a la casa de Cardano y mediante la promesa de guardar el secreto, obtuvo la regla para resolver la ecuación del tipo $x^3+px=q$ dada en forma de versos[5] y

[5]Tomado de ***"Tartaglia: El desafío de una ecuación"***

sin ninguna indicación de la prueba, lo cual se muestra en el Cuadro 1.1.

Cuando está el cubo con las cosas preso	(x^3+px)
y se iguala a un número discreto	$(x^3+px=q)$
busca otros dos que difieran en eso.	(t-s=q)
Después tu harás esto que te espeto	
que su producto siempre sea igual	$\left(t\cdot s=\left(\frac{p}{3}\right)^3\right)$
al tercio cubo de la cosa neto,	
Después el resultado general	
de sus lados cúbicos bien restados	$(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{s})$
te dará a ti la cosa principal.	$(x=\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{s})$

Cuadro 1: Verso de Tartaglia

Cardano tenía un joven sirviente, Ludovico Ferrari, con el cual se dedicó, por un tiempo, a estudiar detenidamente el método de Tartaglia, y consiguió incluso resolver la ecuación general de tercer grado, $x^3+px^2+qx=r$, suprimiendo el término de segundo grado, mediante la transformación $x=y-\frac{a}{3}$, empleada en su momento por Del Ferro, y reduciéndola en consecuencia a $y^3+py=q$.

La solución se obtenía haciendo $y=u-v$, y como

$$(u-v)^3+3uv(u-v)-(u^3-v^3)=0,$$

entonces se tiene que

$$y^3+py-q=(u-v)^3+3uv(u-v)-(u^3-v^3)$$

Con $p=3uv\Rightarrow\frac{p}{3}=uv$ y $q=u^3-v^3$. Ahora, elevando al cubo la primera igualdad y multiplicándola por 4 se llega a $\dfrac{4p^3}{27}=4u^3v^3$; y elevando al cuadrado la segunda igualdad $q^2=(u^3-v^3)^2=u^6-2u^3v^3+v^6$

Al sumar

$$\begin{aligned} q^2+\frac{4p^3}{27} &= u^6-2u^3v^3+v^6+4u^3v^3 \\ &= u^6+2u^3v^3+v^6 \\ &= (u^3+v^3)^2 \end{aligned}$$

De donde,

$$u^3 + v^3 = \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}$$

Por otra parte, despejando u^3 de $q = u^3 - v^3$ y sustituyendo en la ecuación anterior, se obtiene

$$v^3 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

De igual forma, para u^3 se tiene

$$u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Con lo cual,

$$y = u - v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

En el año 1542, Cardano se dirigió a Bolonia, donde se pusieron en contacto con el yerno de del Ferro, Annibale Della Nave, quien les permitió buscar entre los papeles de aquél y revisar todos sus trabajos, encontrando el método de resolución de las ecuaciones reducibles, exactamente el mismo que les había comunicado Tartaglia, y, por tanto, descubierto con fecha muy anterior.

Ahora podrían darlo a conocer sin faltar al juramento. Por lo cual, Cardano decidió publicarlo, en 1545, en un libro que recogería el estado de la cuestión sobre el álgebra (*Artis Magnae sive de regulis algebraicis* (Del gran arte, o de las reglas algebraicas)) más conocida como *Ars Magna*, en el cual aparecen los métodos de resolución de los casos posibles de ecuaciones de tercer grado, los tres de Tartaglia más otros diez, que son todos los que resultan de poner cada uno de los términos en un miembro u otro de la ecuación, puesto que, en aquel tiempo, ningún coeficiente podía ser negativo.

Tartaglia al ver el libro publicado sufre una gran decepción pues consideraba que se había faltado al juramento. Todo este conflicto finalizó con el reto por parte de Ferrari a una disputa pública, que Tartaglia se vio obligado a aceptar.

Cada contrincante debía proponer 31 problemas a su oponente. Cardano, no se presentó a dicho duelo, y el resultado final apunta a una derrota por parte de Tartaglia, que hubo de regresar a Venecia casi como un fugitivo.

Por otra parte, los griegos también realizaron estudios con respecto a la solución de la ecuación cúbica, y para ello emplearon su álgebra en términos geométricos. Asimismo, los chinos también ofrecieron un método para su solución, el cual consistía en la extracción de raíces, según Gheverghese (1991).

Ecuación de grado 4

La resolución de la ecuación de cuarto grado se le atribuye al ingenio del matemático Ludovico Ferrari (1522-1565). El procedimiento consiste en realizar una serie de transformaciones con el objetivo de llegar a una ecuación cúbica, la cual ya se conocía un método para darle solución. Lo anterior fue publicado por primera vez en el libro matemático *Ars Magna*, de Gerolamo Cardano.

La ecuación de cuarto grado y con coeficientes reales que considera Ferrari es la siguiente

$$x^4+2px^3+qx^2+2rx+s=0$$

El primer paso para dar solución a dicha ecuación, consiste en sumar el polinomio $(ax+b)^2$ a cada término de la ecuación original, donde se obtiene

$$x^4+2px^3+qx^2+2rx+s+(ax+b)^2=(ax+b)^2$$

Luego, se desarrolla el cuadrado del binomio para llegar a

$$x^4+2px^3+qx^2+2rx+s+a^2x^2+2abx+b^2=a^2x^2+2abx+b^2$$

Y agrupando términos semejantes, la ecuación anterior se reescribe en la forma

$$x^4+2px^3+(q+a^2)x^2+2(r+ab)x+(s+b^2)=a^2x^2+2abx+b^2 \tag{1.14}$$

Ahora, lo que se pretende encontrar es el valor de $p,k\in\mathbb{R}$ tal que el miembro de la izquierda se pueda escribir en la forma $(x^2+px+k)^2$, es decir,

$$(x^2+px+k)^2=a^2x^2+2abx+b^2$$

De donde

$$x^4+2px^3+(p^2+2k)x^2+2pkx+k^2=a^2x^2+2abx+b^2 \tag{1.15}$$

De (1.14) y (1.15) y por igualdad de polinomios se determina que

$$p^2+2k=q+a^2;2pk=2(r+ab);k^2=s+b^2$$

Es decir,

$$p^2+2k=q+a^2 \tag{1.16}$$

$$pk=r+ab \tag{1.17}$$

$$k^2=s+b^2 \tag{1.18}$$

De la ecuación (1.17), despejando ab, se obtiene que $ab = pk - r$.
Así $(ab)^2 = (pk - r)^2$, entonces

$$a^2 b^2 = (pk - r)^2 \tag{1.19}$$

De la ecuación (1.16) se despeja a^2 para llegar a

$$a^2 = p^2 + 2k - q \tag{1.20}$$

Y de la ecuación (1.18) despejando b^2 se evidencia

$$b^2 = k^2 - s \tag{1.21}$$

De esta forma, sustituyendo a^2 y b^2 en (1.19) resulta que

$$(p^2 + 2k - q)(k^2 - s) = (pk - r)^2$$

Efectuando el producto e igualando a cero, puede observarse que

$$2k^3 - qk^2 + 2(pr - s)k - p^2 s + qs - r^2 = 0$$

La cual es una ecuación cúbica con variable k, que posee al menos una raíz real.

Una vez encontrado el valor de k y sustituyéndolo en las ecuaciones (1.19), (1.20) y (1.21) se pueden hallar los valores de a y b. Por consiguiente,

$$(x^2 + px + k)^2 = (ax + b)^2$$

se escribe con los valores determinados y así

$$|x^2 + px + k| = |ax + b|$$

De la ecuación anterior, se concluye que

$$x^2 + px + k = ax + b$$

$$x^2 + px + k = -(ax + b)$$

lo que reduce a las siguientes ecuaciones cuadráticas

$$\begin{aligned} x^2 + (p - a)x + (k - b) &= 0 \\ x^2 + (p + a)x + (k + b) &= 0 \end{aligned}$$

Por último, se resuelven para obtener las respectivas soluciones de la ecuación $x^4 + 2px^3 + qx^2 + 2rx + s = 0$.

Para obtener una mayor comprensión del método de Ferrari, se presenta el siguiente ejemplo, el cual consiste en resolver la ecuación

$$x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 10x - 3 = 0$$

Para dar solución a éste, primero se debe determinar los valores de p y q. Para ello, igualando el coeficiente de x^3 a $2p$ y el coeficiente de x a $2r$, así

$$2p = -2 \Rightarrow p = -1$$

$$2r = 10 \Rightarrow r = 5$$

Sumando el polinomio $(ax+b)^2$ a ambos miembros de la igualdad, con a y b por determinar, de modo que $(ax+b)^2$ sea igual a $(x^2+px+k)^2$, es decir,

$$x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 10x - 3 + (ax+b)^2 = (ax+b)^2 = (x^2 - x + k)^2$$

Desarrollando productos y reduciendo términos semejantes, se puede escribir

$$x^4 - 2x^3 + (a^2-5)x^2 + 2(ab+5)x + (b^2-3) = x^4 - 2x^3 + (2k+1)x^2 - 2kx + k^2$$

Por igualdad de polinomios

$$a^2 - 5 = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = 2k + 6 \tag{1.22}$$

$$2(ab+5) = -2k \Rightarrow ab = -k - 5 \tag{1.23}$$

$$b^2 - 3 = k^2 \Rightarrow b^2 = k^2 + 3 \tag{1.24}$$

De la ecuación (1.21) se tiene $(ab)^2 = (-k-5)^2$, es decir,

$$a^2b^2 = k^2 + 10k + 25 \tag{1.25}$$

Sustituyendo a^2 y b^2 de las ecuaciones (1.22) y (1.24) en (1.25):

$$(2k+6)(k^2+3) = k^2 + 10k + 25$$

Seguidamente, efectuando los productos, reduciendo términos semejantes e igualando a cero, se obtiene la ecuación cúbica

$$2k^3 + 5k^2 - 4k - 7 = 0$$

De modo que $k = -1$ es un cero de la ecuación anterior; sustituyendo este valor en las ecuaciones (1.22), (1.23) y (1.24), se obtiene $a^2 = 4$, $ab = -4$ y $b^2 = 4$.

De $a^2 = 4$ se tienen los valores $a = -2$ y $a = 2$. De $b^2 = 4$, se encuentran $b = 2$ y $b = -2$. Sin embargo, de $ab=-4$ se determina que a y b deben ser de signos opuestos, por lo que $a=2$ y $b=-2$, o bien $a=-2$ y $b=2$.

Por consiguiente,

$$(ax+b)^2=(x^2-x+k)^2$$

Con $a=2$, $b=-2$ y $k=-1$, se escribe

$$(2x-2)^2=(x^2-x-1)^2$$

Es decir,

$$|2x-2|=|x^2-x-1|$$

De la ecuación anterior

$$x^2-x-1=2x-2 \Leftrightarrow x^2-3x+1=0$$

o bien

$$x^2-x-1=-(2x-2) \Leftrightarrow x^2+x-3=0$$

De donde se pueden concluir las raíces

$$x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}, x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}, x=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}, x=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$$

Por tanto, el conjunto de soluciones de la ecuación $x^4-2x^3-5x^2+10x-3=0$ es

$$S=\left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}, \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right\}$$

Por su parte, Descartes en 1637 publica una solución para la ecuación de cuarto grado de la forma

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0 \tag{1.26}$$

El método de solución empleado es el siguiente:

Primero se realiza el cambio de variable $x=y-\frac{a}{4}$ en (1.26), donde se obtiene:

$$\begin{aligned}
0 &= \left(y-\frac{a}{4}\right)^4+a\left(y-\frac{a}{4}\right)^3+b\left(y-\frac{a}{4}\right)^2+c\left(y-\frac{a}{4}\right)+d \\
0 &= y^4-4y^3\left(\frac{a}{4}\right)+6y^2\left(\frac{a}{4}\right)^2-4y\left(\frac{a}{4}\right)^3+\left(\frac{a}{4}\right)^4+a\left[y^3-3y^2\frac{a}{4}+3y\left(\frac{a}{4}\right)^2-\left(\frac{a}{4}\right)^3\right] \\
&\quad +b\left[y^2-y\frac{a}{2}+\left(\frac{a}{4}\right)^2\right]+cy-\frac{ac}{4}+d \\
0 &= y^4-y^3a+\frac{3y^2a^2}{8}-\frac{ya^3}{16}+\frac{a^4}{256}+ay^3-\frac{3y^2a^2}{4}+\frac{3ya^3}{16}-\frac{a^4}{64}+by^2-\frac{yba}{2}+\frac{ba^2}{16}+cy-\frac{ac}{4}+d \\
0 &= y^4+y^2\left(\frac{-3a^2}{8}+b\right)+y\left(\frac{2a^3}{16}-\frac{ba}{2}+c\right)+\left(\frac{-3a^4}{256}+\frac{ba^2}{16}-\frac{ac}{4}+d\right) \\
0 &= y^4+qy^2+ry+s \quad (1.27)
\end{aligned}$$

para $q = \frac{-3a^2}{8} + b$, $r = \frac{2a^3}{16} - \frac{ba}{2} + c$ y $s = \frac{-3a^4}{256} + \frac{ba^2}{16} - \frac{ac}{4} + d$

La idea para resolver (1.27), es hallar números k, l y m de tal manera que

$$y^4 + qy^2 + ry + s = (x^2 + kx + l)(x^2 - kx + m) \tag{1.28}$$

Desarrollando el extremo derecho e igualando coeficientes, se obtiene

$$\begin{aligned} l + m - k^2 &= q && (1.29) \\ k(m - l) &= r && (1.30) \\ lm &= s && (1.31) \end{aligned}$$

Despejando l y m en la ecuación (1.30) y sustituyendo estos valores en (1.29), se llega a

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2}\left(k^2 + q + \frac{r}{k}\right) \\ l &= \frac{1}{2}\left(k^2 + q - \frac{r}{k}\right) \end{aligned}$$

Al sustituir estos datos en (1.31) se tiene

$$\begin{aligned} k^6 + 2qk^4 + (q^2 - 4s)k^2 - r^2 &= 0 \\ (k^2)^3 + 2q(k^2)^2 + (q^2 - 4s)k^2 - r^2 &= 0 \end{aligned}$$

lo cuál es una ecuación cúbica en la variable k^2.

Por último, se soluciona esta ecuación para k^2 y después se halla los valores de k, l, y m. Los cuales al sustituirlos en $(x^2 + kx + l)$ y $(x^2 - kx + m)$, producen las respectivas soluciones de la ecuación $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Para la resolución de la ecuación $y^4 - 17y^2 - 20y - 6 = 0$, se utiliza el método de Descartes.

Como es una ecuación que no posee el término de tercer grado, es decir, es de la forma (1.27), se procede de la siguiente manera

$$\begin{aligned} y^4 - 17y^2 - 20y - 6 &= (x^2 + kx + l)(x^2 - kx + m) \\ &= x^4 + x^2(m - k^2 + l) + x(km - kl) + lm \end{aligned}$$

De esta forma

$$\begin{aligned} -17 + k^2 &= m + l && (1.32) \\ \frac{-20}{k} &= m - l && (1.33) \end{aligned}$$

Sumando (1.32) y (1.33) resulta

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2}\left(-17 + k^2 - \frac{20}{k}\right) && (1.34) \\ l &= \frac{1}{2}\left(-17 + k^2 + \frac{20}{k}\right) && (1.35) \end{aligned}$$

Por consiguiente, como $s = ml = -6$ esto implica

$$\begin{aligned}
-24 &= (-17+k^2-\frac{20}{k})(-17+k^2+\frac{20}{k}) \\
-24k^2 &= (k^3-17k-20)(k^3-17k+20) \\
-24k^2 &= k^6-17k^4+20k^3-17k^4+289k^2-340k-20k^3+340k-400 \\
0 &= k^6-34k^4+313k^2-400
\end{aligned}$$

entonces $k^2 = 16 \Rightarrow k = 4$.

Posteriormente, sustituyendo el valor de k en (1.34) y (1.35) se obtiene que $m = -3$ y $l = 2$. Al evaluarlos en (x^2+kx+l) y (x^2-kx+m) se llega a

$$\begin{cases} x^2+4x+\frac{1}{2}(16-17+\frac{20}{4}) &= 0 \\ x^2-4x+\frac{1}{2}(16-17-\frac{20}{4}) &= 0 \end{cases}$$

Finalmente se concluye que

$$\begin{cases} x^2+4x+2 &= 0 \\ x^2-4x-3 &= 0 \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$x = -2 \pm \sqrt{2} \text{ y } x = 2 \pm \sqrt{7}.$$

Cabe destacar que la mayoría de aportes de Descartes fueron editados por el matemático holandés Frans van Schooten, quien en 1659 publicó un escrito titulado “Geometria, à Renato Des Cartes: anno 1637 Gallicè edita; postea autem una cum notis / Florimondi de Beavne ... Gallicè conscriptis in Latinam Linguam versa, & commentariis illustrata, operâ atque studio Francisci à Schooten ... ”(González, s.f, p. 78).

Ecuación de grado 5

En el siglo XVI, los matemáticos ya conocían la manera de solucionar ecuaciones polinómicas de grado uno, dos, tres y cuatro, por lo que, surgió el interés por conocer un método para hallar las soluciones de la ecuación siguiente, es decir, la de grado cinco.

Sin embargo, los esfuerzos por generar un método algebraico que determinara las soluciones utilizando las operaciones básicas y la extracción de raíces, duró casi trescientos años. Es por ello, que hasta finales del siglo $XVII$, según Tomber (1970), “se estudiaba intensamente la ecuación general de quinto grado”(p. 347).

No obstante, fue Niels Henrick Abel quien demostró que “es imposible obtener un procedimiento algebraico que sirva para resolver todas las ecuaciones de quinto grado”(Tomber, 1970, p. 347-348). Además, su ingenio no se detuvo ahí, y “demostró que es imposible resolver las ecuaciones generales de grado n mayor que 4”(Tomber, 1970: p. 348).

Dado que no se podían resolver las ecuaciones mediante los métodos tradicionales, es que personajes como Galois y Ruffini comienzan a buscar nuevos medios para lograrlo. A partir de ello, se originan las estructuras algebraicas grupos, anillos y campos, las cuales permiten comprender la Teoría de Galois.

Conclusiones

El desarrollo de la investigación permitió reconocer las fórmulas generales para encontrar la solución de ecuaciones polinómicas con una incógnita de grado uno, dos, tres y cuatro, así como concluir que las ecuaciones polinómicas de quinto grado son irresolubles mediante radicales.

Se ha evidenciado la importancia que tuvieron las civilizaciones antiguas y algunos matemáticos del pasado, en el desarrollo de los contenidos de ecuaciones polinómicas con una incógnita de grado uno, dos, tres, cuatro y cinco, al estudiar e investigar su historia. De esta manera se brinda una forma alternativa de comprender, analizar y comparar la trascendencia del contenido a través de la historia.

Además, se puede concluir que los resultados obtenidos por las civilizaciones antiguas y los matemática de la época, referentes a la solución de ecuaciones polinómicas con una incógnita de grado uno, dos, tres, cuatro y cinco, se emplean actualmente como parte de la malla curricular de los sistemas educativos, tanto a nivel secundario como universitario. Por esta razón, conocer algunos datos históricos de los contenidos que se desarrollan en el salón de clases pueden contribuir hacer más amena las clases de matemática.

Referencias Bibliográficas

Artemiadis, N. (2004). *History of Mathematics. From a Mathematician’s Vantage Point.* Estados Unidos: American Mathematical Society.

Babini, J. (1970). *Historia de las ideas modernas en Matemática.* Washington, D. C.: Departamento de Asuntos Científicos de la Secretaría de la Organización de los Estados Americanos.

Bell, E. T. (1949). *Historia de las matemáticas.* México, D. F.: Gráfica Panamericana.

De la Peña, J. A. (2000). *El álgebra en el siglo XX.* Miscelánea Matemática. Consultado en octubre 20, 2011 en http://www.miscelaneamatematica.org/Misc32/JoseAntonio.pdf.

De Lorenzo, J. (1977). *Las matemáticas y el problema de su historia.* Madrid: Editorial Tecnos.

Escuela de matemática de la Universidad de Costa Rica. (2004). *Grandes matemáticos de la historia.* San José: Sección de Impresión del SIEDIN.

Gheverghese, G. (1991). *La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas.* Madrid: Ediciones Pirámide.

Godino, J. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros.* Consultado en Enero 15, 2013 en http://www.ugr.es/local/jgodino/.

Gutiérrez, S. (2007). *Tartaglia: El desafío de una ecuación.* Suma. Consultado en Agosto 04, 2010 en www.revistasuma.es.

Morales, L (2002). *Las matemáticas en el antiguo Egipto.* Consultado en Enero 9, 2012 en http://www.mat.uson. 1-1-egipto.pdf.

Perero, M. (1994). *Historia e historias de Matemáticas.* México: Grupo Editorial Iberoaméricana, S. A de C. V.
Tomber, M. (1970). *Introducción al Álgebra Contemporánea.* México: UTEHA.