Propuesta de situaciones didácticas para la enseñanza del Teorema de Probabilidad Total

M.Sc. Giovanni Sanabria Brenes, Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica
Dr. Kyriakos Petakos, Academia Turística de Rodos, Grecia

Resumen

El presente trabaja presenta una aplicación de la Teoría de las Situaciones Didácticas, establecida por Brousseau (Brousseau, 1997), a la enseñanza del Teorema de Probabilidades Totales a nivel universitario. Así se presenta una propuesta con una serie de situaciones problema cuyo solución permitirá al estudiante adquirir el conocimiento pretendido.

Palabras clave: Didáctica, probabilidad, Probabilidad Total, Teoría de Situaciones.

1 Introducción

A nivel universitario, la teoría de probabilidades es estudiada por múltiples carreras, y en cada uno de los diferentes cursos es esencial el estudio del Teorema de Probabilidad Total y de la Regla de Bayes. Usualmente, este teorema es presentado como parte de la regla de Bayes.

Las dificultades que presentan los estudiantes en estos tópicos han sido evidenciadas por algunas investigaciones, así como su clasificación y el planteamiento de posibles soluciones (Díaz & de la Fuente, 2006; Díaz & de la Fuente, 2007). Pero, la mayoría de propuestas que se presentan para mejorar la enseñanza de estos tópicos intentan enfrentar el problema como uno solo: ¿Cómo enseñar la regla de Bayes?

Sin embargo, dicho problema puede ser divido en dos sub-problemas: ¿Cómo enseñar el Teorema de Probabilidad Total?, ¿Cómo enseñar la Regla de Bayes? Más específicamente, generalmente La Regla de Bayes es presentada de la siguiente forma:

Camino usual: *Si Ω simboliza el espacio total de un experimento y* A_i *es una secuencia de eventos mutuamente excluyentes, cuya unión forma Ω, entonces por cada posible evento B se tiene que*

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)}$$

La enseñanza de esta regla se puede abordar en dos momentos:

Camino propuesto: *Si Ω simboliza el espacio total de un experimento y* A_i *es una secuencia de eventos mutuamente excluyentes, cuya unión forma Ω, entonces por cada posible evento B se tiene que*

I. (Probabilidad Total) $P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)$

II. (Regla de Bayes) $P(A_i \mid B)=\frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{P(B)}$

El lector puede observar que el camino propuesto presenta una Regla de Bayes más simple, menos complicada de asimilar por parte del estudiante. El camino usual es poco natural, trata de abordar dos problemas (hallar P(B) y $P(A_i|B)$) en uno solo, enmascara el teorema de probabilidades totales, brinda un algoritmo o fórmula para dar solución a los problemas usuales dejando de lado el razonamiento deductivo (“Debo hallar $P(A_i|B)$, para hallarla utilizando Bayes se debo tener P(B), ¿Cómo la halló? R/ Probabilidad Total”) que nos libera del peso de los grandes algoritmos.

Así, bajo el camino propuesto, un problema tradicional sobre Regla de Bayes decir ser resuelto en dos etapas:

Etapa I: Aplicación del Teorema de Probabilidad Total para hallar P(B) necesaria para la siguiente etapa.

Etapa II: Aplicación de la Regla de Bayes para hallar $P(A_i|B)$ y resolver el problema

Desde esta óptica, se debe revalorar las dificultades que han sido dadas a la Regla de Bayes, pues nos podemos llevar la sorpresa de que muchas de estas se encuentra en el Teorema de Probabilidad Total y quizás la Regla de Bayes, según el camino propuesto, no presente problemas.

El presente trabajo brinda una propuesta para abordar la enseñanza de laprimera etapa de un problema bayesiano: el Teorema de Probabilidad Total. Posteriormente en otro trabajo se abordará una propuesta para la II etapa.

Seguidamente se presentan los fundamentos teóricos de la propuesta, luego se describe la propuesta, y finalmente se evidencian los resultados de la aplicación de la propuesta a un grupo de estudiantes.

2 Fundamento Teórico

2.1 Fundamento matemático

Teorema (Probabilidad Totales) Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ eventos que forman una partición del espacio muestral Ω. Sea B un evento cualquiera, entonces $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) P(A_i)$

Prueba. Note que

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) \qquad \text{(Eventos disjuntos)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) P(A_i) \quad \text{(probabilidad condicional)}
\end{aligned}
$$

2.2 Fundamento pedagógico

Toda propuesta didáctica debe estar fundamentada en una concepción epistemológica. La presente propuesta se basa en la teoría de Situaciones de Brousseau (1986). Bajo esta perspectiva el profesor debe diseñar situaciones problema cuya solución sea el conocimiento que se quiere enseñar. Así, se plantea uno o varios problemas al estudiante (situación a-didáctica), el cuál de ser motivado para que por medio de sus conocimientos previos logre resolverlos y así lograr la devolución de la situación, donde le devuelve la responsabilidad de su aprendizaje al profesor. Esta situación es a-didáctica, puesto que el docente le oculta al estudiante la intención didáctica de los problemas. En la resolución de esta situación estudiante vive situaciones de formulación y validación, en busca de la solución para obtener un conocimiento contextualizado y personalizado. Cuando se logra la devolución de la situación, el profesor toma este conocimiento para institucionalizarlo, es decir el profesor relaciona este conocimiento con el saber formal pretendido.

Por otro lado, sobre los problemas bayesianos Díaz & de la Fuente (2006) señala: " Una nueva tendencia en la investigación sugiere que los cálculos con problemas bayesianos son más sencillos cuando la información se da en formato de frecuencias absolutas, en lugar de usar probabilidades, porcentajes o frecuencias relativas"

Además está autora sugiere el uso de diagramas para materializar las particiones del espacio muestral.

Estas consideraciones son parte esencial de la propuesta.

3 Proceso metodológico para el desarrollo de la propuesta

El desarrollo de la propuesta, su valoración y mejoramiento estuvo a cargo de los autores del presente artículo. Los autores son investigadores y docentes universitarios con amplia experiencia en la enseñanza de la probabilidad y preocupados por su mejoramiento.

La propuesta fue motivada por la dificultad que presentan algunos estudiantes en la compresión del Teorema de Probabilidad Total tanto en Grecia (Europa) como en Costa Rica (America).

La propuesta es fruto de su experiencia en el aula, su conocimiento y de la revisión bibliográfica sobre la enseña del tema.

El desarrollo de propuesta siguió los siguientes pasos:

#	Descripción	Encargado
1.	Revisión bibliográfica sobre la enseñanza de la Regla de Bayes y el Teorema de Probabilidades Totales	M.Sc. Giovanni Sanabria Brenes, Dr. Kyriakos Petakos
2.	Propuesta inicial de las etapas para abordar la enseñanza del tema y elaboración de las situaciones problemas de cada etapa.	M.Sc. Giovanni Sanabria Brenes
3.	Valoración de la propuesta inicial, observaciones y recomendaciones.	Dr. Kyriakos Petakos
4.	Mejoramiento de la propuesta en base al paso anterior.	M.Sc. Giovanni Sanabria Brenes
5.	Edición de la propuesta final	M.Sc. Giovanni Sanabria Brenes, Dr. Kyriakos Petakos

Como se puede observar el proceso investigativo culmina con la elaboración de la propuesta. Es necesario, como etapa siguiente, realizar la validación de la propuesta para analizar sus alcances en la enseñanza del tema y retroalimentarla. Se espera hacer esta validación y comunicar los resultados obtenidos. El presente trabajo tiene como finalidad dar a conocer la propuesta concebida apartir de los pasos descritos anteriormente.

4 Propuesta: Enseñanza del Teorema de Probabilidad Total

Algunas consideraciones sobre la propuesta:

- La propuesta va dirigida a estudiantes universitarios como conocimientos básicos sobre los siguientes tópicos de probabilidad: espacio muestral, eventos, probabilidad de un evento y la regla de Laplace, reglas aditivas, probabilidad condicional, reglas multiplicativas. Sin embargo, la propuesta es fácilmente adaptable a niveles inferiores, siempre que los alumnos tengan los conocimientos previos señalados

- Se recomienda que los estudiantes trabajen las situaciones problema planteadas, en la propuesta, en grupos de 3 a 5 personas y que se promueva la asertividad bajo los siguientes principios (Hare, 2000):
    - Sentirse conveniente en participar en la clase hacia la meta propuesta
    - Conseguir un ambiente social en la clase, que alenta el intercambio de opiniones entre los estudiantes y también el profesor en un sentido productivo
    - Conservación y si fuera posible aumento de la autoestima.

- La propuesta se divide en 7 etapas. Dichas etapas son motivadas por una o varias situaciones problemas encaminadas hacia la comprensión y aplicación adecuada del teorema.

- El docente debe buscar estrategias que permitan que los estudiantes obtengan soluciones similares a las plateadas para cada situación problema de la propuesta, por ejemplo: exposición de soluciones planteadas por los grupos, discusión de la solución. La idea es que el docente motive a los estudiantes a que busque la solución más eficiente al problema, sin caer en el efecto Topaze.

- Las situaciones problema son iniciales, es decir ejemplifican un modelo de problema inicial cuyo solución permita el dominio personalizado de la etapa en la se encuentren. Es responsabilidad del profesor institucionalizar el dominio de cada una de las etapas proponiendo problemas similares y despersonalizando el conocimiento adquirido.

- Una vez resuelto cada problema y discutida su solución, el profesor, como parte de su labor de institucionalización del conocimiento, debe presentar la solución oficial y evidenciar su estrecha relación con la solución final propuesta por los estudiantes.

Seguidamente se presentan las etapas de la propuesta obtenida.

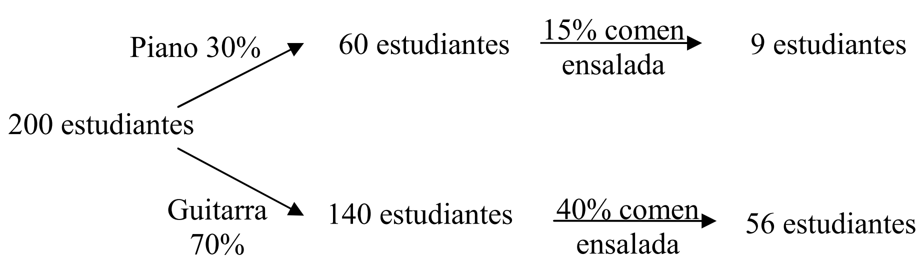
I etapa: Acercamiento concreto (Valores absolutos numéricos)

Recuerde que de acuerdo a la Teoría de Situaciones, se deben plantear al estudiante situaciones problemas, cuya resolución generen parcialmente el conocimiento pretendido. Así la propuesta inicia con la siguiente situación.

Problema #1. En una escuela de música hay 200 alumnos. El 30% recibe clases de piano y el 70% restante va a clases de guitarra. El 15% de los estudiantes que reciben piano les gusta comer ensalada al igual que el 40% de los que reciben guitarra. ¿Qué porcentaje de los estudiantes les gusta comer ensalada?

Este problema introductorio puede ser resuelto con los conocimientos previos que tiene el estudiante sobre porcentajes. Se debe instar a estos que traten de representar con un diagrama o esquema la solución al problema:

Diagrama de Valores absolutos



Así, en total hay 65 estudiantes de la escuela que comen ensalada, lo cual equivale al

$$\frac{65}{200} \bullet 100 = 32.5\%$$

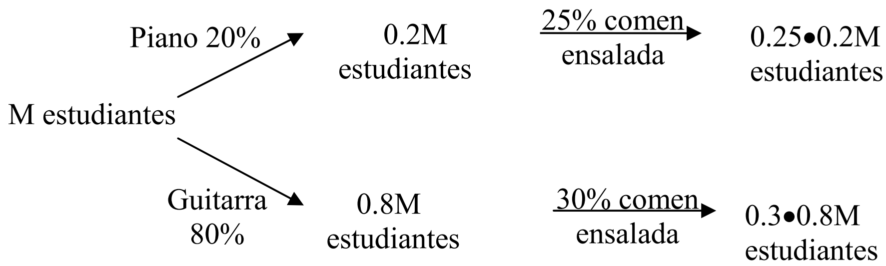
II etapa: Valores absolutos algebraicos

El siguiente problema es semejante al anterior, pero agrega una nueva dificultada, simboliza la cantidad total en lugar de brindarla.

Problema #2. En una escuela de música hay M alumnos. El 20% recibe clases de piano y el 80% restante va a clases de guitarra. El 25% de los estudiantes que reciben piano les gusta comer ensalada al igual que el 30% de los que reciben guitarra. ¿Cuántos estudiantes, en términos de M, les gusta comer ensalada? ¿Qué porcentaje de los estudiantes les gusta comer ensalada?

Solución:

Diagrama de Valores absolutos



En total, el número de estudiantes que les gusta comer ensalada es

$$0.25\bullet 0.2M + 0.3\bullet 0.8M = (0.25\bullet 0.2 + 0.3\bullet 0.8)\,M = 0.29\,M,$$

Lo cual equivale a un $\dfrac{0.29M}{M}\bullet 100 = 29\%$

Con este problema se pretende que el estudiante descubra que no es necesario conocer la cantidad total para hallar el porcentaje en este tipo de problemas. Este conocimiento es reafirmado mediante el siguiente problema:

Problema #3. En una encuesta, el 60% de los encuestados indican que el país debe tener relaciones con China, por el contrario, el otro 40% indica que se debe establecer relaciones con Taiwan. El 20% de los encuestados que prefieren relaciones con China practican algún deporte, al igual que el 35% de los encuestados que prefieren relaciones con Taiwan. Para determinar el porcentaje de encuestados que practican algún deporte, ¿es necesario conocer la cantidad total de encuestados? Justifique su respuesta.

III etapa Valores relativos (porcentajes)

En esta etapa se busca que el estudiante pase de la resolución algebraica a la resolución numérica con valores relativos, para ello se plantea el siguiente problema:

Problema #4. La siguiente muestra el porcentaje de hombres y mujeres estudiantes de cada unos de los colegios involucrados. Además se indica para cada colegio, el porcentaje de hombres que tienen sobrepeso con respecto al total de hombres, al igual que el porcentaje de mujeres que tienen sobrepeso con respecto al total de mujeres. Determine el porcentaje de estudiantes de cada colegio con sobrepeso.

Colegio	**% de hombres:**	**% de mujeres:**	**De los hombres, el % con sobrepeso es:**	**De las mujeres, el % con sobrepeso es:**	**% de estudiantes con sobrepeso:**
A	20%	80%	40%	55%	
B	15%	85%	70%	70%	
C	40%	60%	25%	20%	
D	65%	35%	35%	10%	
E	85%	15%	15%	30%	
F	90%	10%	25%	55%	

Se pretende que el estudiante, ante la resolución repetida de un esquema de problema, abandone la resolución algebraica optando por una resolución más simple y sistemática. Para lograr esto, se recomienda el trabajo en grupos por parte de los alumnos donde: se estimule el trabajo cooperativo, se solicite la búsqueda de una solución sistemática del problema y se expongan dichas soluciones. Se espera que el estudiante note que el resultado buscado se obtiene sumando los productos obtenidos al multiplicar los porcentajes ubicados en ciertas columnas, por ejemplo el resultado para el colegio A es:

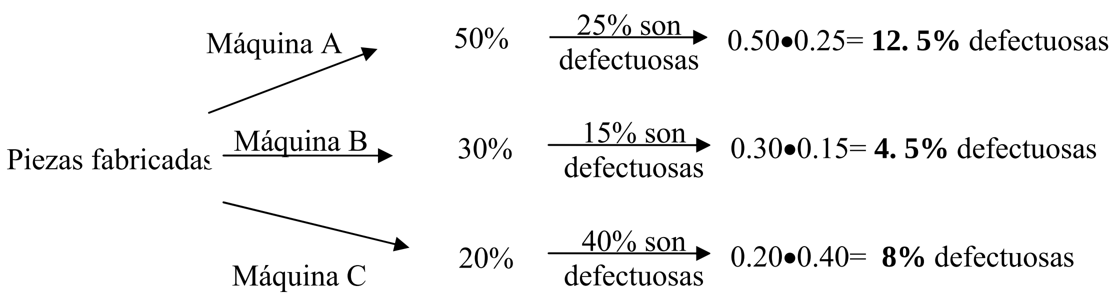
$$0.20 \bullet 0.40 + 0.80 \bullet 0.55 = 0.52$$

El siguiente problema se introduce con el fin de generalizar el conocimiento adquirido a una partición mayor de la cantidad total y de establecer un diagrama para valores relativos.

Problema #5. Las piezas fabricadas por cierta empresa son el elaboradas por las máquinas A,B y C. La máquina fabricó el 50% de las piezas, la máquina B el 30% y el restante 20% es fabricado por la máquina C. El 25% de las piezas fabricadas por la máquina A son defectuosas, al igual que el 15% de las piezas fabricadas por B y el 40% de las fabricadas por C. ¿Qué porcentaje de las piezas fabricadas son defectuosas? Representa la resolución del problema por medio de un diagrama.

Solución:

Diagrama de Valores relativos (porcentajes)



El porcentaje de piezas defectuosas es: 12.5% + 4.5% + 8% = 25% es decir, la cuarta parte de las piezas son defectuosas.

Se debe buscar que los estudiantes logren representar este tipo de problemas por medio de diagramas de árbol, el cual puede facilitar la resolución de problemas.

IV etapa: Valores relativos (probabilidad)

El paso de lo relativo o frecuencial a la probabilidad implica un gran cambio de paradigma. El porcentaje está ligado siempre a una cantidad total conocida o no, es un concepto estático, en cambio la probabilidad de un evento no está determinada por una cantidad total de repeticiones del evento, esta noción lleva implícito el concepto de aleatoriedad, es un concepto dinámico.

Ejemplo: Considere el experimento de lanzar un dado.

Porcentaje: Si se lanza el dado 60 veces y en 9 de ellas sale el seis, entonces el porcentaje de lanzamientos en los que se obtuvo un seis es $\frac{9}{60} \bullet 100 = 15\%$. *Note que este valor es sumamente estático, depende de los tiros realizados.*

Probabilidad: La probabilidad de sacar 6 en un dado es $\frac{1}{6}$ *o 16.6% aproximadamente. Esto no significa que si se lanza el dado cierta cantidad de veces, en un sexto de los lanzamientos se obtuvo un seis. El concepto de probabilidad es más complejo, establece que entre más lanzamientos se realicen el porcentaje de lanzamientos con resultado seis se va ir acercando a 16.6% aproximadamente.*

Para efectos del presente trabajo, se asume que el estudiante tiene un concepto adecuado de probabilidad y ha adquirido los conocimientos previos anteriormente mencionados.

Continuando con la propuesta, se presenta el siguiente problema:

Problema #6. Un desperfecto en el servicio eléctrico de cierta comunidad puede deberse a: falla en el equipo eléctrico con una probabilidad del 40%, problemas en el equipo electrónico con una probabilidad de 25%, ó por errores humanos con una probabilidad del 35%. Además la probabilidad de que desperfecto pueda solucionarse en menos de una hora es: del 30% si sucedió por errores en el equipo eléctrico, del 60% si el error se presentó en el equipo electrónico y del 20% si fue ocasionado por error humano. Suponga que ocurre un desperfecto al azar.

a. Describa el espacio muestral, denote los eventos involucrados y utilice esta notación para simbolizar las probabilidades dadas.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que un desperfecto sea solucionado en menos de una hora? Representa la resolución del problema por medio de un diagrama.

Solución:

a. Ω es el conjunto de posibles desperfectos. Dada un desperfecto escogido al azar considere los siguientes eventos:

A_1: el desperfecto se debe a un fallo eléctrico.
A_2: el desperfecto se debe a un fallo electrónico.
A_3: el desperfecto se debe a un fallo humano.
B : el desperfecto se solucionó en menos de una hora.

Se tiene que:

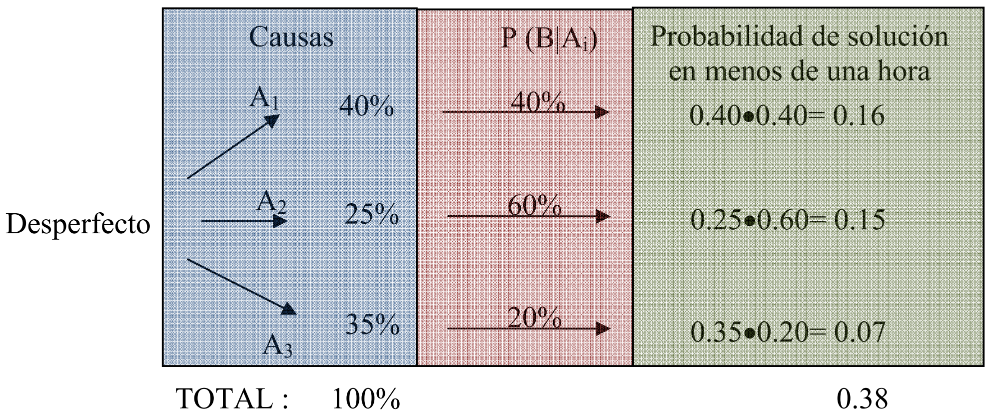
$$\begin{array}{ll} P(A_1) = 0.4 & P(B \mid A_1) = 0.4 \\ P(A_2) = 0.25 & P(B \mid A_2) = 0.6 \\ P(A_3) = 0.35 & P(B \mid A_3) = 0.2 \end{array}$$

Es importante hacer énfasis al estudiante en que describa el espacio muestral en un problema de probabilidad, pues al hacerlo descubre la aleatoriedad y le da sentido a las probabilidades involucradas.

Además, en cuanto a la noción, note que la solución propuesta denota ciertos eventos por A_1, A_2 y A_3 , lo cual sugiere una partición. Sin embargo, esto no tiene que ser la norma y el estudiante posiblemente inicialmente denote este eventos de manera independiente por A,C y D, lo cual no es para nada incorrecto. Se espera que, con el contacto en este tipo de problemas, el estudiante eduque la intuición y obtenga notaciones similares a la propuesta y se convenza de que la notación propuesta es la mejor pues tiene una doble función: denotar los eventos y establecer una relación entre ellos (forman una partición del espacio muestral), facilitando la solución del problema.

b. Se espera que los estudiantes obtengan un diagrama similar al siguiente:

Diagrama de Valores relativos (probabilidades)



V etapa: Institucionalización

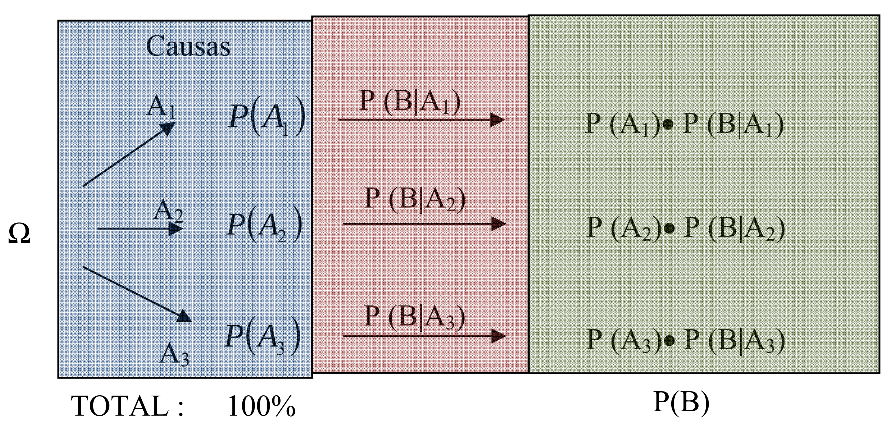
Problema #7. Sean A_1, A_2, A_3 eventos que forman una partición del espacio muestral Ω, y B un evento cualquiera. Suponga que las probabilidades

$$P(A_1), P(A_2), P(A_3), P(B \mid A_1), P(B \mid A_2) \text{ y } P(B \mid A_3)$$

son conocidas. Determine la probabilidad de B

Solución:

Diagrama de Valores relativos (probabilidades)



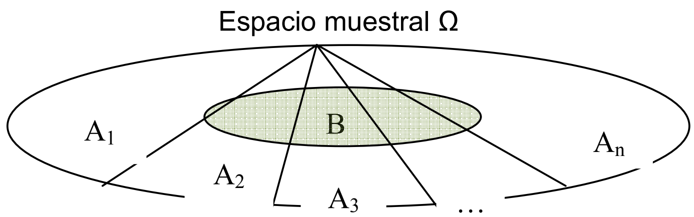
Así

$$P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + P(A_3)P(B \mid A_3)$$

Posterior a la solución y discusión del problema #7, el profesor procede a enunciar formalmente el Teorema de Probabilidad Total y si procede (esto depende del tipo de curso de probabilidades que se imparta) realiza su demostración.

<u>Teorema (Probabilidad Totales)</u> Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos que forman una partición del espacio muestral Ω. Sea B un evento cualquiera, entonces $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) P(A_i)$

Prueba. Dado que



Note que

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$$

Dado que los conjuntos de la forma $(A_i \cap B)$ son disjuntos entonces

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B) \right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$$

y como $P(A_i \cap B) = P(B \mid A_i) P(A_i)$ se obtiene que $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) P(A_i)$.

Luego el profesor propone el siguiente problema para que **aplique lo aprendido**:

Problema #8. La probabilidad de que un jugador de futbol se lesione en un partido competencia es de 0.05 si hace buen tiempo y de 0.15 si el tiempo es malo. El meteorólogo pronostica que para el próximo partido hay una probabilidad de que llueva del 30% y de que exista buen tiempo es de 70%. ¿Cuál es la probabilidad de que un jugador se lesione en el próximo partido?

Solución: Similar al anterior. La respuesta es 8%.

Es importante notar que "*la aplicación de lo aprendido*" es muy distinto a "*la aplicación del teorema*". Cuando profesor enuncia el teorema, institucionaliza el conocimiento ya adquirido por el estudiante a partir de la resolución de los problemas anteriores. Es decir, el teorema se enuncia formante después de haberlo aprehendido.

VII etapa: ¡Cuidado con el complemento!

Hasta el momento los problemas tratados indican la probabilidad de cada una de las partes en que se divide el espacio muestral. Por lo general, en un problema de probabilidades totales se omite la probabilidad de una de las partes, pues el estudiante la puede adquirir por complemento. Sin embargo, la experiencia nos ha indicado que esto añade una dificultad mayor al problema que muchas veces el estudiante no supera, en especial si el espacio muestral es divido en solo dos partes.

Lo anterior a motivado a que en esta propuesta se le brinde un tratamiento especial al complemento, o más concretamente a la detección de la partición. Así se plantea el siguiente problema:

Problema #9. La probabilidad de que una persona de Cartago adquiera una enfermedad es de 10%. Si una persona de Cartago tiene la enfermedad, la probabilidad de que el examen de sangre para detectar la enfermedad sea positivo es de 95%. Si una persona de Cartago está sana, la probabilidad de que el examen de sangre para detectar la enfermedad sea positivo es de 5%. Si una persona de Cartago (que se desconoce si posee o no la enfermedad) se realiza el examen de sangre, ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado sea positivo?

Para el resolver el problema, siga los siguientes pasos:

- *a) Describa el espacio muestral*
- *b) Discuta con tus compañeros sobre la partición correcta que se debe definir para resolver el problema.*
- *c) Denote los eventos involucrados.*
- *d) Determine la probabilidad de cada parte en que se divide el espacio muestral*
- *e) Utilice la notación establecida para simbolizar las probabilidades dadas.*
- *f) Si una persona de Cartago (que se desconoce si posee o no la enfermedad) se realiza el examen de sangre, ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado sea positivo?*

Solución:

Como se ha señalado es importante que los estudiantes puedan describir el espacio muestral, pues es este el que van a dividir en partes. En este caso, si se elige una persona al azar de Cartago el espacio muestral (conjunto de posibles resultados) es el conjunto de personas de Cartago.

¿Cómo realizamos la partición del espacio muestral? Es bueno que los estudiantes por medio de la discusión logren determinar dos maneras de partir el espacio muestral:

1. Personas sanas y enfermas.
2. Personas que dan positivo en el examen de sangre y las que no.

Es importante que el profesor, después de la discusión de los estudiantes indique estas dos maneras de partir el espacio muestral y les solicite a los estudiantes que determine si ambas maneras sirven para solucionar el problema.

La idea es que, de acuerdo a Brousseau, el alumno investigue las opciones que tiene para resolver el problema, y el profesor no le sugiera el camino a seguir, el alumno lo debe descubrir. Así se considera incorrecto intervenciones del profesor tales como: “La partición 2 no les va a permitir resolver el problema”, “una de las particiones no permite resolver el problema”. Se espera que el alumno, a partir del análisis del problema, descarte la segunda partición.

Al simbolizar los eventos involucrados, es posible que el alumno considere los eventos: la persona está enferma y la persona está sana, como independientes y los simbolice por ejemplo con A_1 y A_2 respectivamente.

Sin embargo al hallar la probabilidad de A_1 y A_2 se espera que detecte su dependencia: A_2 es el complemento de A_1. Así, $P(A_1) = 0.1$ y $P(A_2) = 0.9$. Incluso dicha dependencia puede ser vista desde la Teoría de conjuntos y desde la probabilidad:

Teoría de Conjuntos	Probabilidad
$A_2 = \overline{A_1}$	$P(A_1) = 0.1$ $P(A_1 \mid A_2) = 0$ Como $P(A_1)$ no es igual a $P(A_1 \mid A_2)$ A_1 y A_2 son dependientes

En caso de que el estudiante no logre obtener $P(A_2)$ y se niegue a reconocerla, el profesor para garantizar el avance de la clase y sacar al alumno de la situación de bloqueo, puede proceder recordando que $A_1 \cup A_2 = \Omega$.

Por otro lado, al simbolizar con B: la persona salió positiva en el examen, se tiene que

$$P(B|A_1) = 0.95 \text{ y } P(B|A_2) = 0.05$$

Por lo tanto la probabilidad solicitada es

$$P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) = 0.14$$

VI etapa: ¿Qué se debe averiguar?

Como una etapa final se proponen problemas en los cuales la probabilidad del evento B es dada y se solicita averiguar alguna de las otras normalmente dadas. Este tipo de problemas tienen una dificultad mayor, y exigen del alumno el dominio de todos los procesos involucrados en el Teorema de Probabilidad Total: detección de la partición, interpretación correcta de las probabilidades condicionales dadas y de la probabilidad a averiguar, solución de problema. Además, en esta etapa se pasa del cálculo numérico (etapas anteriores) a lo algebraico (las ecuaciones), lo que evidentemente aumenta la dificultad.

En esta etapa se busca evitar que el estudiante cometa el error de reducir el Teorema de Probabilidad Total a un algoritmo sin sentido: "solo se multiplican las primas probabilidades respectivamente por las otras y se suman los resultados".

Problema #9.. La probabilidad de que una pieza fabricada por la empresa X tenga defectos es del 45%. Las piezas son elaboradas por dos máquinas, la maquina 1 fabrica el 60% de las piezas, y la probabilidad de que una pieza elaborada por la maquina 1 tenga defectos es de 30%. ¿Cuál es la probabilidad de que una pieza elaborada por la maquina 2 tenga defectos?

Solución:

Se pretende que el profesor presente el problema como un ejercicio más, es decir que no lo señale con un problema de mayor dificultad, lo cual podría desmotivar a los estudiantes. Se espera que el dominio de las etapas anteriores sean herramientas suficientes para resolver el problema.

Note que Ω es el conjunto de piezas fabricadas por la empresa X. Considere los siguientes eventos:

A_1: la pieza es fabricada por la máquina 1

A_2: la pieza es fabricada por la máquina 2

B : la pieza es defectuosa

De acuerdo a los datos:

$$P(B) = 0.45$$
$$P(A_1) = 0.6, \quad P(B|A_1) = 0.3$$
$$P(A_2) = 0.4, \quad P(B|A_2) = x$$

Por el Teorema de Probabilidad Total se tiene la ecuación:

$$0.45 = 0.6 \cdot 0.3 + 0.4x$$

Por lo tanto $P(B|A_2) = x = 67.5\%$

5 Conclusión

Tomando con referencias la Teoría de las Situaciones Didácticas, establecida por Brousseau (Brousseau, 1997), se propusieron 9 situaciones problema para la enseñanza del Teorema de Probabilidades Totales. Dicha propuesta puede ser abordada no solo a nivel universitario, sino puede ser adaptada para secundaria.

Se espera validar la propuesta en un grupo de estudiantes con el fin de determinar su impacto en la enseñanza de la probabilidad total y retroalimentarla.

6 Bibliografìa

Barberis, F.; Ròdenas, E.; Bosch, I (2006). *La evaluación continua en matemáticas en la Universidad*. XIV Jornadas de ASEPUMA. Recuperado de http://www.uv.es/asepuma/XIV/comunica/116.pdf

Devore, J. (1998). *Probabilidad y Estádistica para Ingeniería y Ciencias*. México: International Thomson Editores, 4a ed.

Sanabria, G. & Núñez, F. (2010). Una propuesta para introducir el estudio de las probabilidades: Probabilidad Frecuencial. En Facultad de Ciencias Naturales, Universida Estatal a Distancia. *Memorias III Encuentro de Enseñanza de la Matemática UNED, realizado en el INBio Parque, Heredia, Costa Rica, 3 y 4 de setiembre 2010*. InBio Parque, Heredia, Costa Rica.

Walpole, R, Myers, R, Myers, S. (1999). *Probabilidad y estadística para ingenieros*. USA: Prentice-Hall Hispanoamericana. S.A, Sexta Ed.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2007). *Dificultades en la resolución de problemas que involucran el Teorema de Bayes*. Un estudio exploratorio en estudiantes de psicología. *Educación Matemática, 18(2), 75-94.*

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2006). Enseñanza del teorema de Bayes con apoyo tecnológico. En P. Flores y J. Lupiáñez (Eds.), Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales. ISBN: 84-688-0573-4 . CD ROM.

Feller, W (1968). *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. Wiley.

Hare, B (2000). *Sea asertivo*. Buenos Aires: Ediciones Gestión.

Kagan, S (1994). *Cooperative Learning*. Kagan Publishing.

Lefrancois, G (1991). *Psychology for Teaching*. Wadsworth Publishing.

Gagatsis, A. & Papastavridis, S (2003). *Proceedings of the 3rd Mediterranean Conference on Mathematics Education*.

Sàbato, E (1948). *El Túnel*. Buenos Aires, Letras Hispánicas.

Sanabria, G (2010). Una propuesta para la enseñanza de los Elementos de Análisis Combinatorio. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*.

Sanabria, G (2012). *Comprendiendo las probabilidades. Costa Rica*. Editorial tecnológica de Costa Rica.