ECUACIONES CUADRÁTICAS CON UNA INCÓGNITA

Una ecuación de segundo grado con una incógnita es de la forma:

$ax^2 + bx + c = 0$, en donde a, b y c son constantes, con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$, además $a \neq 0$ y x es la incógnita **real**.

Ejemplos: Obtención de los valores de a, b y c, en una ecuación de segundo grado.

Determine los valores de a, b y c, dadas las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $3x^2 - 2x + 5 = 0$, entonces $a = 3$ $b = -2$ $c = 5$.

b) $x^2 + 3x = 4$, en este caso primero igualamos a cero así, $x^2 + 3x - 4 = 0$

entonces $a = 1$ $b = 3$ $c = -4$.

c) $2x(x - 3) + 1 = 0$, en esta situación primero aplicamos la propiedad distributiva así,

$2x^2 - 6x + 1 = 0$, entonces $a = 2$ $b = -6$ $c = 1$.

d) $5x^2 + 2x = 0$, entonces $a = 5$ $b = 2$ $c = 0$.

e) $-x^2 + 5 = 0$, entonces $a = -1$ $b = 0$ $c = 5$.

El Discriminante de una Ecuación de Segundo Grado con una Incógnita.

Se denomina discriminante de una ecuación de segundo grado con una incógnita, al número representado por la letra griega mayúscula Δ y se define de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Ejemplo:

Obtenga el discriminante de la ecuación $6x - 2x^2 + 1 = 0$.

- Primero ordenamos la ecuación en forma descendente con respecto a x.
  $-2x^2 - 6x + 1 = 0$

- Segundo determinamos los valores de a, b y c.
  $a = -2 \quad b = -6 \quad c = 1$.

- Tercero obtenemos el valor del discriminante.
  $\Delta = (-6)^2 - 4(-2)(1) = 36 + 8$

  $\Delta = 44$

Estudio del Discriminante de una Ecuación de Segundo Grado con una Incógnita.

El discriminante de una ecuación de segundo grado con una incógnita, es un número que discrimina las ecuaciones que tienen soluciones **reales** de las que no. Así,

- Si $\Delta \geq 0$
  - Si $\Delta > 0$
    - •Es número cuadrado perfecto, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales (racionales) distintas.
    - •No es número cuadrado perfecto, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales (irracionales) distintas.
  - Si $\Delta = 0$
    - •La ecuación tiene dos soluciones reales iguales o sea una solución real repetida o de multiplicidad dos.

Si $\Delta < 0$ { La ecuación **NO** tiene soluciones **reales)**.

Ejemplo: Número de soluciones de una ecuación de segundo grado con una incógnita.

Determine el número de soluciones reales de las siguientes ecuaciones:

a) $2x^2 + 3x = 2$

$2x^2 + 3x - 2 = 0$

$\Delta = (3)^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25$, por lo que la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes.

b) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4(4)(1) = 16 - 16 = 0$, por lo que la ecuación tiene dos soluciones reales iguales o sea una solución repetida.

c) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(5) = 9 - 40 = -31$, por lo que la ecuación **NO** tiene soluciones reales.

Fórmula General para la Solución de Ecuaciones de Segundo Grado con una incógnita.

Existe una fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado con una incógnita, la cual se deducirá a continuación:

Partiendo de,

$ax^2 + bx + c = 0$, en donde a, b y c son constantes, con $a \in \mathbb{R}$ $b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$, además $a \neq 0$ y x es la incógnita **real**

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0, \qquad \text{dividiendo por } a \text{ ambos lados de la igualdad.}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0,\qquad \text{completando cuadrados tenemos,}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\left|x+\frac{b}{a}\right|=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad \text{por lo que,}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\end{cases}$$

Ejemplo: Conjunto solución de una ecuación de segundo grado con una incógnita.

Determine el conjunto solución S de las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $2x^2 + 3x - 2 = 0$

- Primero obtenemos el discriminante de la ecuación.

  $\Delta = (3)^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25.$

- Segundo aplicamos la fórmula general.

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{2\cdot 2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-3+5}{4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2} \\ x_2=\dfrac{-3-5}{4}=\dfrac{-8}{4}=-2\end{cases}$$

$$\therefore \text{ el conjunto solución es } S=\left\{\frac{1}{2},-2\right\}.$$

Esta ecuación también puede ser resuelta, por medio de la factorización de un polinomio y la propiedad absorbente del cero, este método justifica en parte del **¿para qué de la factorización?**.

$2x^2 + 3x - 2 = 0$

Factorizando por medio de inspección obtenemos,

$(x + 2)(2x - 1) = 0$

Utilizando la propiedad absorbente del cero tenemos que,

$x + 2 = 0$ ó $2x - 1 = 0$

$\Rightarrow x = -2$ y $2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

$$\therefore \text{ el conjunto solución es } S = \left\{\frac{1}{2}, -2\right\}.$$

b) $x^2 - 4x - 2 = 0$

- Primero obtenemos el discriminante de la ecuación.

  $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(-2) = 16 + 8 = 24.$

- Segundo aplicamos la fórmula general.

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{24}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{4 + 2\sqrt{6}}{2} \\ x_2 = \dfrac{4 - 2\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \text{ el conjunto solución es } S = \left\{2 + \sqrt{6}, 2 - \sqrt{6}\right\}.$$

Casos Especiales de la Ecuación de Segundo Grado con una incógnita.

Definimos dos casos especiales o particulares de las ecuaciones de segundo grado, que son:

- Primer caso, cuando $c = 0$.

  $ax^2 + bx = 0$, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$

  Factorizando obtenemos:

  $x(ax + b) = 0$

  Por la propiedad absorbente del cero tenemos que:

  $x_1 = 0$ ó $ax + b = 0$

$$x_2 = \frac{-b}{a}$$

$\therefore$ el conjunto solución es $S = \left\{0, \frac{-b}{a}\right\}$

Segundo caso, cuando $b = 0$.

$ax^2 + c = 0$, con $a \neq 0$ y $c \neq 0$

$ax^2 = -c$

$$x^2 = \frac{-c}{a}$$

$$|x| = \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

$\therefore$ el conjunto solución es $S = \left\{\sqrt{\frac{-c}{a}}, -\sqrt{\frac{-c}{a}}\right\}$, siempre que $\frac{-c}{a} > 0$.

Ejemplo: Resolución de ecuaciones especiales o particulares de segundo grado con una incógnita.

Resuelva y determine el conjunto solución S de:

a) $3x^2 = 6x$

$3x^2 - 6x = 0$

$x = 0$ y $x = 2$, $\therefore$ el conjunto solución es $S = \{0, 2\}$

b) $x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$

$|x| = \sqrt{9}$

$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ $\therefore$ el conjunto solución es $S = \{-3, 3\}$

ECUACIONES BICUADRÁTICAS

Son ecuaciones de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, en donde a, b y c son constantes, con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$, además $a \neq 0$ y x es la incógnita **real**.

La solución de estas ecuaciones se puede realizar efectuando una sustitución como: $x^2 = u$ y $x^4 = u^2$

Ejemplo: Resolver la $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

- Realizando la sustitución $x^2 = u$ y $x^4 = u^2$
- Obtenemos $u^2 - 10u + 9 = 0$
- Luego el discriminante de la ecuación.

  $\Delta = (-10)^2 - 4(1)(9) = 100 - 36 = 64.$

- Después aplicamos la fórmula general.

$$u = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} u_1 = \dfrac{10+8}{2} = 9 \\ u_2 = \dfrac{10-8}{2} = 1 \end{cases}$$

- Resolviendo para x,

$$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \;\; y \;\; x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\therefore \text{el conjunto solución es } S = \{-3, 3, -1, 1\}.$$

Utilizando el mismo método anterior, podemos resolver ecuaciones de la forma:

- $ax^6 + bx^3 + c = 0$
- $ax^8 + bx^4 + c = 0$
- $ax^{10} + bx^5 + c = 0$

En general,

- $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, con $n \in \mathbb{Q}$

Ejercicios:

1. Resuelva y encuentre el conjunto *S* de solución de:

   a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ R/ $S = \{-3, 3, -2, 2\}$
   b) $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ R/ $S = \left\{\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, 1, -1\right\}$
   c) $x^6 - 7x^3 + 6 = 0$ R/ $S = \left\{1, \sqrt[3]{6}\right\}$
   d) $x^4 - 16x^2 - 225 = 0$ R/ $S = \{-5, 5\}$
   e) $4x^{-4} - 13x^{-2} + 3 = 0$ R/ $S = \left\{2, -2, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

2. Resuelva los siguientes problemas:

   a) Hallar dos números pares consecutivos y cuyo producto es 360. R/ 18 y 20
   b) Un cateto de un triángulo mide 7m más que el otro y uno menos que la hipotenusa. Hallar las longitudes de los lados. R/ 5m,12m y 13m.

INTRODUCCIÓN

François Vieta o Viète matemático francés (1540-1603). Conocedor de Diofanto y Cardano, estableció las reglas para la extracción de raíces. Se dedicó así mismo al estudio de los fundamentos del álgebra, con la publicación, en 1591, de In artem analyticam isagoge, en el cual introdujo un sistema de notación que hacía uso de letras en las fórmulas algebraicas. Se ocupó finalmente de diversas cuestiones geométricas, como la trigonometría plana y esférica.
En esta ocasión se estudiarán las fórmulas de Viète (también llamadas ecuaciones de Viète o de Cardano-Viète) establecen una relación entre las raíces y los coeficientes de un polinomio

Fórmulas de Viète

Usualmente estamos ante el problema de encontrar las soluciones de una ecuación, pero, qué pasa cuando tenemos las soluciones y buscamos más bien la ecuación.

Ejemplo: Encuentre una ecuación cuadrática cuyas soluciones sean –3 y 7.

Podemos ver que las ecuaciones equivalentes (ecuaciones que tienen el mismo conjunto solución) a $(x+3)(x-7)=0$ cumplen lo establecido, ya que por el principio absorbente del cero con respecto al producto, estas son las soluciones de esta ecuación.
Expandiendo, tenemos: $(x+3)(x-7)=0 \Rightarrow x^2+3x-7x-21=0 \Rightarrow$ $x^2-4x-21=0$ y esta última es la forma estándar de la ecuación.

Si analizamos los coeficientes de esa ecuación que es mónica (una ecuación es mónica cuando el coeficiente principal a = 1) y buscamos una relación con sus soluciones podemos ver que el opuesto de la suma de las soluciones es igual al término de grado uno y la multiplicación de las soluciones es igual al término constante: $-(-3+7)=-4\ y\ \ -3\cdot 7=-21$.

Ejemplo: Encuentre una ecuación cuadrática y mónica cuyas soluciones sean –5 y 9.

De la misma manera:

$(x+5)(x-9)=0 \Rightarrow x^2+5x-9x-45=0 \Rightarrow x^2-4x-45=0.$

De nuevo, $-(-5+9)=-4$ y $-5\cdot 9=-45$. Este es un resultado esperable como consecuencia de la factorización por inspección.

Una ecuación cuadrática y mónica cuyas soluciones son α y β es de la forma

$x^2+bx+c=0$ donde $b = -(\alpha + \beta)$ y $c = \alpha\cdot\beta$.

Ejemplo: Encuentre una ecuación cuadrática mónica cuyas soluciones sean

$8-\sqrt{7}$ y $8+\sqrt{7}$.

Ahora, es más simple aplicar la fórmula de los coeficientes:

$$b=-(\alpha+\beta) \Rightarrow b=-\left(\left(8-\sqrt{7}\right)+\left(8+\sqrt{7}\right)\right)=-\left(8-\cancel{\sqrt{7}}+8+\cancel{\sqrt{7}}\right)=-16$$

$$c=\alpha\cdot\beta \Rightarrow c=\underbrace{\left(8+\sqrt{7}\right)\left(8-\sqrt{7}\right)}_{\substack{\text{La suma por la diferencia}\\ \text{(fórmula notable)}}}=64-7=57.$$

Por lo tanto, una ecuación es, $x^2-16x+57=0$

La **forma general** de una ecuación cuyas soluciones son α y β es $kx^2+kb+kc=0$, donde $b = -(\alpha + \beta)$ y $c = \alpha\cdot\beta$ y k representa cualquier número real distinto de 0, es decir $k \in \mathbb{R}-\{0\}$.

Ejemplo: Encuentre la forma general de las ecuaciones cuadráticas cuyas soluciones son $8-\sqrt{7}$ y $8+\sqrt{7}$.

Como ya se había obtenido UNA ecuación cuyas soluciones eran las dadas, entonces, la forma general es o bien $kx^2-16kx+57k=0$ donde $k \in \mathbb{R}-\{0\}$.

Si tenemos una ecuación completa $ax^2 + bx + c = 0$, y generalizamos el resultado anterior se obtienen las **Fórmulas de Viète** que relacionan la suma de las raíces y los coeficientes de una ecuación cuadrática:

Fórmulas de Viète

En una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, en donde a, b y c son constantes, con $a \in$ IR, $b \in$ IR y $c \in$ IR, además $a \neq 0$ y x es la incógnita **real**, se tiene que α y β son soluciones de dicha ecuación, entonces se cumplen las siguientes relaciones:

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} \quad y \quad \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

Ejemplo: En la ecuación $2x^2 + hx - 3k = 0$ la suma de las raíces es 13 y el producto es 40. Encuentre el valor de h y k.

Aplicando las fórmulas de Viète, para la suma: $\alpha + \beta = \frac{-b}{a} \Rightarrow 12 = \frac{-h}{2} \Rightarrow h = -24$ y para el producto $\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} \Rightarrow 40 = \frac{-3k}{2} \Rightarrow k = \frac{-80}{3}$

Cabe destacar que sin el uso de estas fórmulas, este problema no es sencillo de resolver.

En general para una ecuación polinomial con una incógnita de grado n de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

con soluciones, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ se cumple,

$$\underbrace{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}}_{La\ suma\ de\ sus\ raíces} \ \text{y} \ \underbrace{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \dots \cdot \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}}_{El\ producto\ de\ sus\ raíces}$$

Ejercicios:

1. La suma de las raíces de la ecuación $\sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}kx + t = 0$ es $\sqrt{6}$ y el producto $9\sqrt{6} - 21$. Encuentre k y t.

R/$\sqrt{6} = -\frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{3}} \Longrightarrow k = -3$ y $t = 27\sqrt{2} - 21\sqrt{3}$.

2. Sean α y β las soluciones de la ecuación $5x^2 - hx + 1 = 0, h \in \mathbb{R}^+$, tal que $\alpha - \beta = 1$. Determine el valor de h.

R/$h = 3\sqrt{5}$.

3. Sean α y β las soluciones de la ecuación $2x^2 + hx + 4 = 0, h \in \mathbb{R}^-$, tal que $\frac{\alpha}{\beta} = 3$. Determine el valor de h.

R/$h = -\frac{8\sqrt{6}}{3}$.