Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Un sistema de ecuaciones lineales 2 x 2 está compuesto por dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, de tal manera que se trata de encontrar todas las soluciones posibles que sirvan para una y para la otra simultáneamente, es por esto que se colocará una llave al principio de las dos ecuaciones como se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo: De sistemas de ecuaciones lineales 2 x 2.

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 4y = 8 \end{cases}$ Note que los valores $x = 4$ y $y = 1$, satisfacen simultáneamente ambas ecuaciones.

b) $\begin{cases} 4x - 5y = 0 \\ 3x = 2y + 6 \end{cases}$ Note que los valores $x = \frac{30}{7}$ y $y = -\frac{24}{23}$, satisfacen simultáneamente ambas ecuaciones.

c) $\begin{cases} 9x - 2y = 5 \\ 18x - 4y = 6 \end{cases}$ Note que no hay ningún valor para x y para y, de forma tal que satisfagan simultáneamente ambas ecuaciones.

d) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 6y = 10 \end{cases}$ Note que cualquier valor de x y y, que satisfaga una de las ecuaciones, satisfacen simultáneamente a la otra ecuación, o sea posee infinitas soluciones.

Pero ahora la pregunta que surge es ¿Y cómo se obtienen los resultados de los sistemas dados en los ejemplos? y la respuesta es que existen muchos métodos de solución de dichos sistemas pero nosotros solo estudiaremos tres métodos analíticos de resolución de dichos sistemas que son el método de igualación, el de sustitución y el de suma y resta o reducción.

EL MÉTODO DE IGUALACIÓN

El método de igualación, como su nombre lo indica consiste básicamente en establecer una igualdad a partir de las dos igualdades dadas, por ejemplo:
Al resolver y encontrar el conjunto solución S de

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 4y = 8 \end{cases}$$

procederemos de la siguiente manera:

- Primero enumeramos las ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 & (1) \\ x + 4y = 8 & (2) \end{cases}$$

- Segundo despejamos de (1) y de (2) una de las incógnitas por ejemplo "x".
  De (1) $2x = 5 + 3y$ De (2) $x + 4y = 8$
  $x = \dfrac{5 + 3y}{2}$ (3) $x = 8 - 4y$ (4)

- Seguidamente de (3) y (4) obtenemos la siguiente igualdad:
  $\dfrac{5 + 3y}{2} = 8 - 4y$
  $5 + 3y = 2\ (\ 8 - 4y\ )$
  $3y + 5 = 16 - 8y$
  $3y + 8y = 16 - 5$
  $11y = 11$
  $y = 1$

  por lo que al sustituir $y = 1$ en (4) obtenemos:
  $x = 8 - 4(1) = 8 - 4 = 4$
  $x = 4$
  $\therefore S = \{\ (\ 4, 1\ )\ \}$

EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Procederemos a resolver y encontrar el conjunto solución S del sistema planteado en el ejemplo anterior con el objetivo de comparar las virtudes de ambos métodos.

Al resolver y encontrar el conjunto solución S de

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 4y = 8 \end{cases}$$

procederemos de la siguiente manera:

- Primero enumeramos las ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 & (1) \\ x + 4y = 8 & (2) \end{cases}$$

- Segundo despejamos de (1) o de (2) una de las incógnitas por ejemplo "x".

  De (2) despejamos "x" y obtenemos:
  $x = 8 - 4y$ (3)

- Ahora sustituimos a "x" proveniente de (3) en (1) así,

  $2\ (\ 8 - 4y\ ) - 3y = 5$
  $16 - 8y - 3y = 5$

  y sustituyendo $y = 1$ en (3), obtenemos el valor de "x"
  $x = 8 - 4\ (1) = 4$

$16 - 5 = 8y + 3y$ $\qquad x = 4$

$11 = 11y$ $\qquad \therefore S = \{ (4, 1) \}$

$y = 1$

EL MÉTODO DE SUMA Y RESTA O REDUCCIÓN

En este método, es muy importante tener presente las ecuaciones equivalentes, concepto que explicaremos durante el proceso de resolución para encontrar el conjunto solución S del sistema planteado en los ejemplos anteriores, esto con el objetivo de comparar las virtudes de éste y los métodos antes planteados.

Al resolver y encontrar el conjunto solución S de

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 4y = 8 \end{cases}$$

procederemos de la siguiente manera:

- Primero enumeramos las ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 & (1) \\ x + 4y = 8 & (2) \end{cases}$$

- Luego elegimos una de las incógnitas que deseamos "eliminar", por ejemplo "*y*", con lo que debemos de buscar ecuaciones equivalentes a las que tenemos en el sistema pero en que los coeficientes de la incógnita "*x*" sean equivalentes u opuestos, así, obtenemos el mínimo común múltiplo de los coeficientes de la incógnita "*y*" en el caso particular de 3 y 4 que resulta ser 12, luego dividimos ese mínimo por el coeficiente y multiplicamos toda la ecuación por ese resultado, así multiplicamos la ecuación (1) por 4 y la ecuación (2) por 3, con lo cual obtendremos un sistema equivalente, en donde hemos enumerado con (3) y (4) las ecuaciones como sigue:

$$\begin{cases} 8x - 12y = 20 & (3) \\ 3x + 12y = 24 & (4) \end{cases}$$

- Ahora efectuaremos una suma o una resta según sea el caso (de ahí el nombre de método) de manera que se anulen las incógnitas elegidas en este caso la "*y*" de ambas ecuaciones de tal manera:

$$\begin{cases} 8x - 12y = 20 \\ 3x + 12y = 24 \end{cases}$$

$$\overline{\qquad 11x = 44 \qquad}$$

$x = 4$

- Y por último sustituyendo $x = 4$ en las ecuaciones (1) ó (2) obtendremos el valor de "y", en nuestro caso sustituiremos $x = 4$ en la ecuación (2) como sigue:

  $(4) + 4y = 8$
  $4y = 8 - 4$
  $4x = 4$
  $x = 1$
  $\therefore S = \{ (4, 1) \}$

  Por último, nos proponemos resolver un par de casos que tenemos pendiente por resolver, y que se plantearon al principio los cuales los identificamos con c) y d).

  c) $\begin{cases} 9x - 2y = 5 \\ 18x - 4y = 6 \end{cases}$, al resolverlo por cualquiera de los métodos obtenemos lo siguiente:

  $\begin{cases} 9x - 2y = 5 & (1) \\ 18x - 4y = 6 & (2) \end{cases}$ multiplicando la ecuación (1) por 2 obtenemos:

  $$\begin{cases} -18x + 4y = -10 \\ 18x - 4y = 6 \end{cases}$$

  $0 = -4$, lo cual no es cierto por lo que concluimos que no hay ningún valor para x y y que satisfagan las ecuaciones planteadas en consecuencia tenemos que,

  $S = \{ \ \} = \varnothing$ (conjunto vacío)

  En este caso se dice que el sistema es **incompatible**.

Continuando con el ejemplo d) y resolviéndolo con cualquiera de los métodos antes vistos obtenemos lo siguiente:

d. $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 6y = 10 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x - 3y = 5 & (1) \\ 4x - 6y = 10 & (2) \end{cases}$, multiplicando la ecuación (1) por 2 obtenemos:

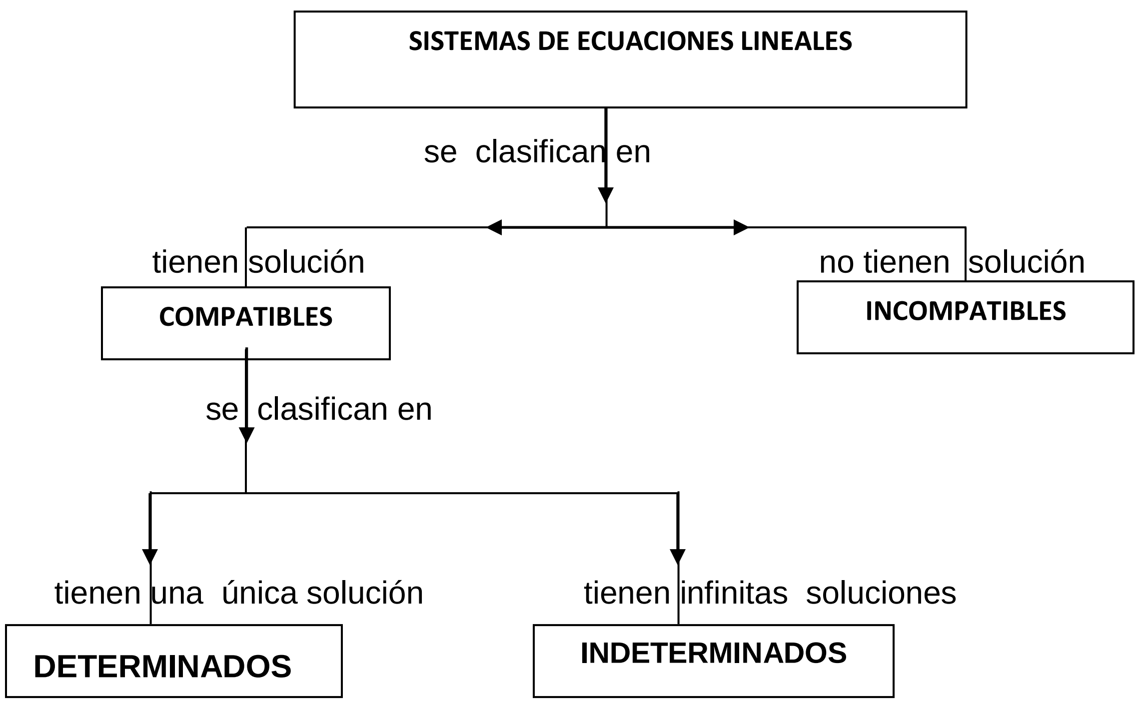
$$\begin{cases} 4x-6y=10 \\ 4x-6y=10 \end{cases}$$

, y ahora procederemos a realizar una resta para obtener lo siguiente:

0 = 0, lo cual es una verdad, y en consecuencia cualquier par ordenado que pertenezca a una de las ecuaciones dadas es solución del sistema. En este caso se dice que el sistema es **compatible e indeterminado** y su conjunto solución compuesto por infinitos elementos es:

$S = \{(x,y) \,/\, 2x - 3y = 5\}$ (el conjunto solución S, son todos los pares ordenados tal que satisfagan la ecuación $2x - 3y = 5$).

Con la finalidad de realizar un resumen de los distintos casos que se presentan, construiremos un esquema:



EJERCICIOS:

Resuelva y encuentre el conjunto de solución S de:

1) $\begin{cases} 3(x+2) = 2y \\ 2(y+5) = 7x \end{cases}$ R/ S = {(4,9)}

2) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{7}{6} \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{3} \end{cases}$ R/ S = {(2,3)}

3) $\begin{cases} \frac{x-3}{3} - \frac{y-4}{4} = 0 \\ \frac{x-4}{2} + \frac{y+2}{5} = 3 \end{cases}$ R/ S = {(6,8)}

Otros sistemas de ecuaciones

Ejemplo: Resuelva y encuentre el conjunto de solución S de:

$$\begin{cases} xy = 56 \quad (1) \\ x^2 + y^2 = 113 \quad (2) \end{cases}$$

Resolviendo por el método de sustitución tenemos,

$$y = \frac{56}{x}, \text{despejando } y \text{ de } (1)$$

Sustituyendo y en (2),

$$x^2 + \left(\frac{56}{x}\right)^2 = 113$$

$$x^2 + \frac{3136}{x^2} = 113$$

$$\frac{x^4 + 3136}{x^2} = 113$$

$$x^4 - 113x^2 + 3136 = 0$$

- Realizando la sustitución $x^2 = u$ y $x^4 = u^2$

- Obtenemos $u^2 - 113u + 3136 = 0$
- Luego el discriminante de la ecuación.

$$\Delta = (-113)^2 - 4(1)(3136) = 12769 - 12544 = 225.$$

- Después aplicamos la fórmula general.

$$u = \frac{113 \pm \sqrt{225}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} u_1 = \dfrac{113 + 15}{2} = 64 \\ u_2 = \dfrac{113 - 15}{2} = 49 \end{cases}$$

- Resolviendo para x,

$$x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm 8 \text{ y } x^2 = 49 \Rightarrow x = \pm 7$$

- Resolviendo para y,

$$\text{Si } x = 8 \text{ entonces } y = \frac{56}{8} = 7,$$

$$\text{Si } x = -8 \text{ entonces } y = \frac{56}{-8} = -7,$$

$$\text{Si } x = 7 \text{ entonces } y = \frac{56}{7} = 8,$$

$$\text{Si } x = -7 \text{ entonces } y = \frac{56}{-7} = -8$$

$$\therefore \text{el conjunto solución es } S = \{(-8,-7),(8,7),(-7,-8),(7,8)\}.$$

Ejemplo: Resuelva y encuentre el conjunto de solución S de:

$$\begin{cases} 2^{x+y} = 8 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Un sistema equivalente sería,

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2, \text{por lo que } y = 1$$

$$\therefore \text{el conjunto solución es } S = \{(2,1)\}.$$