*Profesor Allan Gen Palma*

## CÁLCULO DIFERENCIAL-175

## PRIMER CUATRIMESTRE DEL 2012

## PRÁCTICA DE RAZONES DE CAMBIO RELACIONADAS

Recomendación para realizar está práctica:

- Estudie la materia correspondiente a razones de cambio relacionadas (capítulo 6 del libro de texto)
- Comience resolviendo los ejercicios sin ver el solucionario.
- Si por algún motivo no pudiese continuar con la solución de algún ejercicio después de varios intentos observe el solucionario y termine el ejercicio que dejo incompleto.

Pasos sugeridos para la solución de estos ejercicios:

- Lea muy bien el ejercicio y anote los datos suministrados.
- Establezca una ecuación que relacione la variable sobre la cual se solicita la razón de cambio y los datos de la variable o variables suministrados. En el caso de que una o más variables se encuentren relacionadas, trate de escribirlas en términos de la variable de su conveniencia.
- Luego derive ambos lados de la ecuación con respecto al tiempo(recuerde que es una derivación implícita) y evalúe en el instante o condiciones que se le indica el problema.

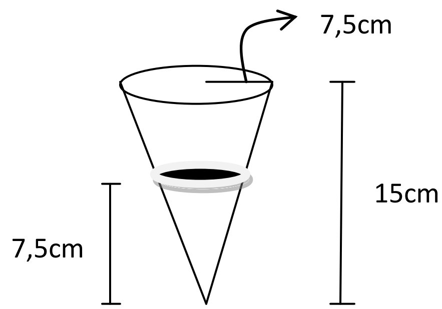
1. Al rodar montaña abajo una esfera de nieve, el radio de la esfera crece a razón de 2 centímetros por minuto. Hallar la razón de cambio del área cuando:
   a) $r$ = 6cm y b) $r$ = 24cm (*r*: radio)

   R/ $96\pi\frac{\text{cm}^2}{\text{min}} \wedge\ 384\pi\frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$

2. Un depósito cónico (con vértice abajo) tiene 10 pies de ancho arriba y 12 pies de hondo. Si el agua fluye en él a razón de 10 pies cúbicos por minuto, hallar la razón de cambio de la altura del agua cuando tal altura es de 8 pies.
   R/$\frac{3}{10\pi}\frac{pies}{min}$

3. Un globo meteorológico que se eleva verticalmente es observado desde un punto en el piso a 30 pies del punto que queda directamente debajo del globo. Si el ángulo $\alpha$ entre el piso y la línea de visión del observador, aumente a razón de $(\pi/180)$ rad/s, ¿con qué razón sube el globo cuando $\alpha = \frac{\pi}{4}$rad ? R/$\frac{\pi}{3}\frac{\text{pies}}{\text{s}}$

4. Dado un filtro cónico gotea café a razón de $5\text{cm}^3/\text{s}$. La altura del filtro es de 15cm y el radio de la parte superior es de 7,5cm, tal y como se ilustra en la figura adjunta. Calcule la rapidez con la que está descendiendo el nivel del café cuando la altura en el filtro sea de 7,5cm.
R/ $-\frac{16}{45\pi}\frac{\text{cm}}{\text{s}}$



*Profesor Allan Gen Palma*

***Soluciones***

1. Los datos dados son:

$\frac{dr}{dt} = 2\,\frac{\text{cm}}{\text{min}}$ (es la rapidez con la que está cambiando el radio de la esfera)

La ecuación que relaciona las variables en estudio es:

$A(r) = 4\pi r^2$(área de la esfera en términos del radio)

Derivando ambos lados de la ecuación con respecto al tiempo:

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi r\,\frac{dr}{dt}$$

Evaluando los datos suministrados:

a) $\frac{dA}{dt} = 8\pi(6\text{cm})\left(2\,\frac{\text{cm}}{\text{min}}\right) = 96\pi\,\frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$

b) $\frac{dA}{dt} = 8\pi(24\text{cm})\left(2\,\frac{\text{cm}}{\text{min}}\right) = 384\pi\,\frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$

2. Los datos dados son:

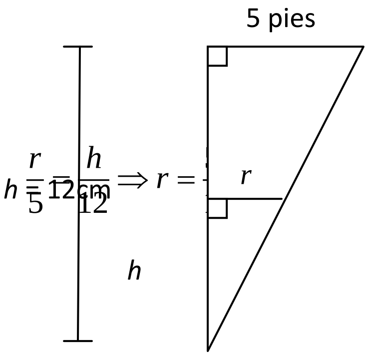
$r = \frac{10}{2}\text{pies} = 5\text{ pies}.$
$h = 12\text{ pies}.$
$\frac{dV}{dt} = 10\,\frac{pies^3}{\text{min}}$ (es la rapidez con la que está cambiando el volumen del recipiente cónico)

La ecuación que relaciona las variables en estudio es:

$V(r,h) = \pi r^2 h$(volumendel recipiente cónico en términos del radio y la altura)

Pero como el radio y la altura se encuentran relacionados:

Dibujando un corte transversal del recipiente se obtiene,




Por la semejanza de triángulos tenemos que,

$$\frac{r}{5} = \frac{h}{12} \Rightarrow r =$$

Remplazando en la ecuación del volumen tenemos,

$V(h) = \pi \left(\frac{5h}{12}\right)^2 h = \frac{25}{144}\pi h^3$(volumen del recipiente cónico en términos dela altura)

Derivando ambos lados de la ecuación con respecto al tiempo:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{75}{144}\pi h^2 \frac{dh}{dt} = \frac{25}{48}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

Despejando la razón de cambio solicitada cuando,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{48}{25\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

Evaluando los datos suministrados en el instante en que$h$ = 8 pies:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{48}{25\pi(8\text{ pies})^2}\left(10\,\frac{pies^3}{\text{min}}\right) = \frac{3}{10}\frac{\text{pies}}{\text{min}}$$

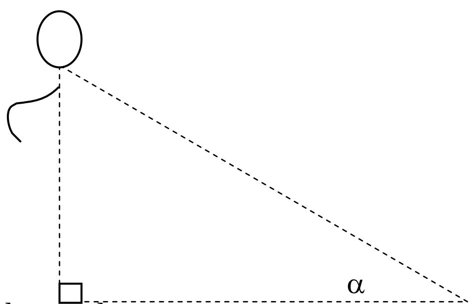
3. Los datosdados son:

$h$: altura del globo
$\alpha$: ángulo de elevación del observador.

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{180}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

30 pies es la distancia a la que se encuentra el observador.

$h$




Observador
30 pies

Fórmula que relaciona a las variables:

$$\tan\alpha = \frac{h}{100}$$

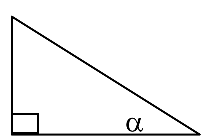
Derivando ambos lados de la ecuación con respecto al tiempo $t$.

$$\sec^2\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{30} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{30}{\cos^2\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \quad (*)$$

Condiciones del instante en que $\alpha = \frac{\pi}{4}$ rad.

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{180}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



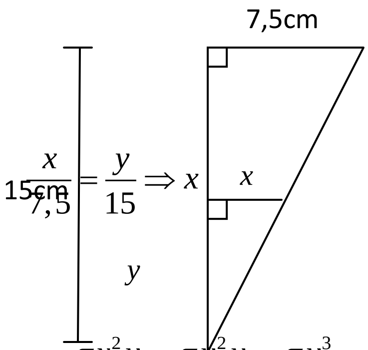

30

Sustituyendo en la fórmula (*)

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{30}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} \cdot \frac{\pi}{180}\frac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{\pi}{3}\frac{\text{pies}}{\text{s}}.$$

La razón de cambio delaaltura a la que se encuentra el globo en el instante $\alpha = \frac{\pi}{4}\,\text{rad}$ es $\frac{\pi}{3}\frac{\text{pies}}{\text{s}}$.

4. Dibujando un corte transversal del filtro se obtiene,




Por la semejanza de triángulos tenemos que,

$$\frac{x}{7,5} = \frac{y}{15} \Rightarrow x$$

Ahora obtenemos el volumen en términos de *y* así,

$\text{V}=\frac{\pi x^2 y}{3} = \frac{\pi y^2 y}{3\cdot 4} = \frac{\pi y^3}{12}$ por lo que el volumen en

términos de y es, $\text{V}(y) = \frac{\pi y^3}{12}$ después derivamos el volumen con respecto al

tiempo*t* y despejamos $\frac{dy}{dt}$, que es lo que andamos buscando.

$$\frac{d\text{V}}{dt} = \frac{3\pi y^2}{12}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$\frac{dy}{dt} = \frac{4}{\pi y^2}\cdot\frac{d\text{V}}{dt}$ y por último sustituyendo los datos suministrados obtenemos,

$\frac{dy}{dt} = \frac{4}{\pi(7,5\text{cm})^2}\cdot\left(-5\frac{\text{cm}^3}{\text{s}}\right) = -\frac{16}{45\pi}\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ y esta es la rapidez con la que desciende el

café cuando la altura es de 7,5 cm, el signo negativo se debe a que la rapidez está

descendiendo.