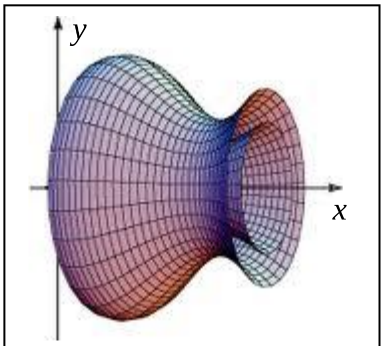
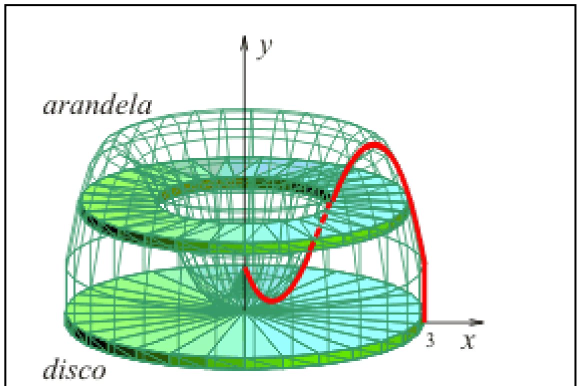
EL CÁLCULO INTEGRAL EN LA OBTENCIÓN DEL VOLÚMENES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Un sólido de revolución es generado al girar una región plana en torno a una recta denominada eje de revolución. Existen varios métodos para el cálculo del volumen de un sólido de revolución, en esta ocasión se estudiarán los siguientes: Método de discos, método de las arandelas y el método de capas.

A continuación se ilustran algunos sólidos de revolución:



Sólido de revolución generado al girar una región plana alrededor del eje *x*.

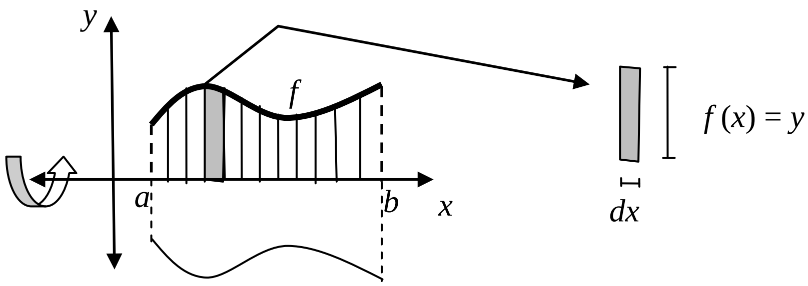


Sólido de revolución generado al girar una región plana alrededor del eje *y*.

MÉTODO DE LOS DISCOS

Este método resulta particularmente útil cuando el eje de revolución es parte del contorno del área plana. El eje de rotación puede ser el eje *x* o uno paralelo a este, así como puede también ser el eje *y* o uno paralelo a este.

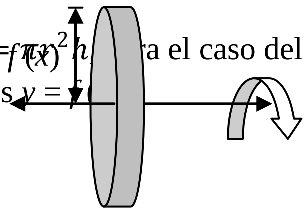
- Cuando el eje de rotación es el eje *x*



Es conveniente tener en consideración los siguientes pasos:

1) Se dibuja la región plana que generará el sólido de revolución, para lo cual se traza la gráfica de la función f entre $x = a$ y $x = b$, luego se dibuja un rectángulo representativo de ancho "infinitesimal" o sea de ancho dx y altura $f(x)$.
2) Empleando el volumen de un cilindro (disco).

$V = \pi r^2 h$ a el caso del disco considerese,
r: es $y = f$



h:es dx.

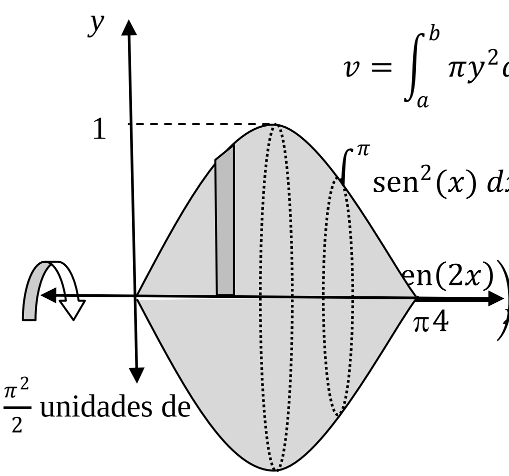
3) Suponer que el número de rectángulos tiende a infinito y al aplicar el teorema fundamental del cálculo.

$$v = \int_a^b \pi y^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Ejemplo:

Calcular el volumen de un sólido de revolución engendrado por la región limitada por $g(x) = \text{sen}\, x$, $x = 0$, $x = \pi$ y $y = 0$ entorno al eje x.

Solución:



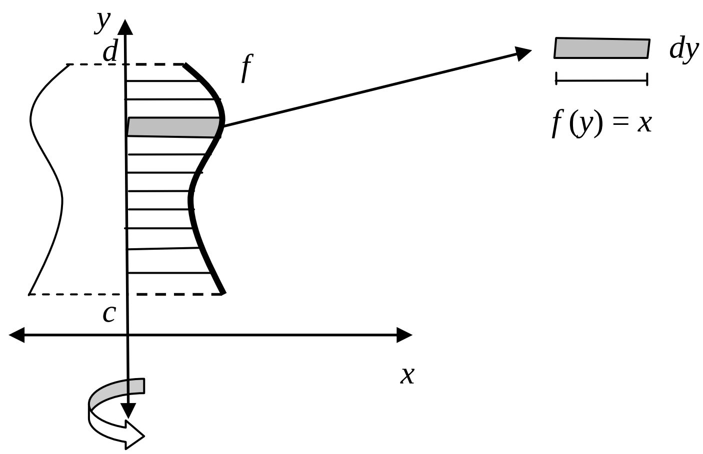
$$v = \int_a^b \pi y^2 dx = \pi \int_0^{\pi} [\text{sen}(x)]^2 dx =$$

$$\int^{\pi} \text{sen}^2(x)\, dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2x)}{2} dx =$$

$$\text{en}(2x)\Big)\Big|_0^{\pi} = \pi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\text{sen}(2\pi)}{4} - 0\right) =$$

$\frac{\pi^2}{2}$ unidades de

- Cuando el eje de rotación en el eje *y*



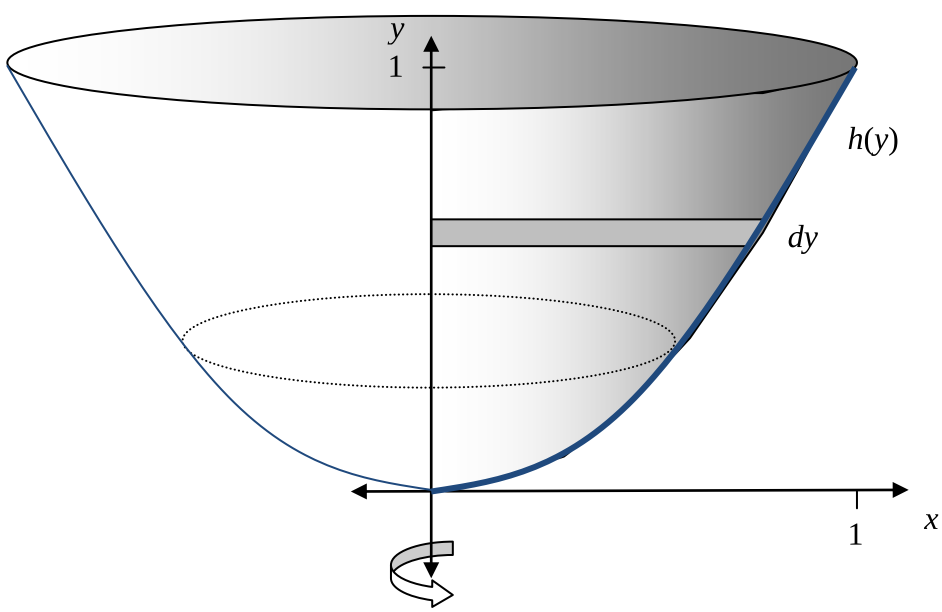
Por lo que el volumen está dado por:

$$v = \int_c^d \pi x^2 dy = \pi \int_c^d [f(y)]^2 dy$$

Ejemplo:

Calcular el volumen de un sólido de revolución engendrado por la región limitada por $h(y) = \sqrt{y}$, *y* = 0, *y* = 1 y *x* = 0 entorno al eje *y*.

Solución:



$v = \pi \int_0^1 \left[\sqrt{y}\right]^2 dy = \pi \int_0^1 y dy = \pi \left(\frac{y^2}{2}\right)|_0^1 = \frac{\pi}{2}$ unidades de volumen.

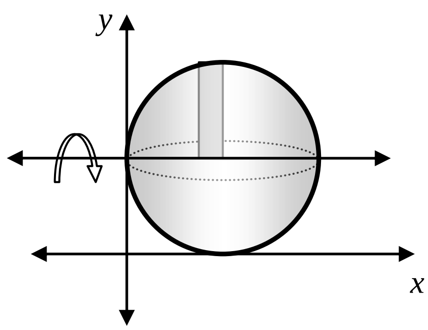
Cuando el eje de rotación es paralelo al eje *x* o al eje *y*.

Ejemplo:

Calcular el volumen de un sólido de revolución engendrado por la región limitada por:

a) $f(x) = \sqrt{4-(x-2)^2} + 2$ $x = 0$, $x = 4$ y $y = 2$ entorno al eje $y = 2$.

Solución:



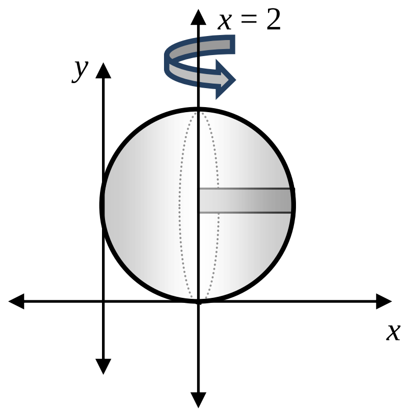
$$v = \int_0^4 \pi(y-2)^2 dx = \pi \int_0^4 \left[\underbrace{\sqrt{4-(x-2)^2}+2}_{y} - 2\right]^2 dx = \pi \int_0^4 [4-(x-2)^2]dx =$$

$$\pi \int_0^4 [4 - x^2 + 4x - 4]dx = \pi \int_0^4 [-x^2 + 4x]dx = \pi\left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)|_0^4 =$$

$$\pi\left(-\frac{64}{3} + 32\right) = \frac{32\pi}{3} \text{unidades de volumen.}$$

b) $h(y) = \sqrt{4-(y-2)^2} + 2$ $y = 0$, $y = 4$ y $x = 2$ entorno al eje $x = 2$.

Solución:



$$v = \int_0^4 \pi(x-2)^2 dy$$

$$= \pi \int_0^4 \left[\underbrace{\sqrt{4-(y-2)^2}+2}_{x} - 2\right]^2 dy = \pi \int_0^4 [4-(y-2)^2]dy =$$

$$\pi \int_0^4 [4 - y^2 + 4y - 4]dy = \pi \int_0^4 [-y^2 + 4y]dy = \pi\left(-\frac{y^3}{3} + 2y^2\right)|_0^4 =$$

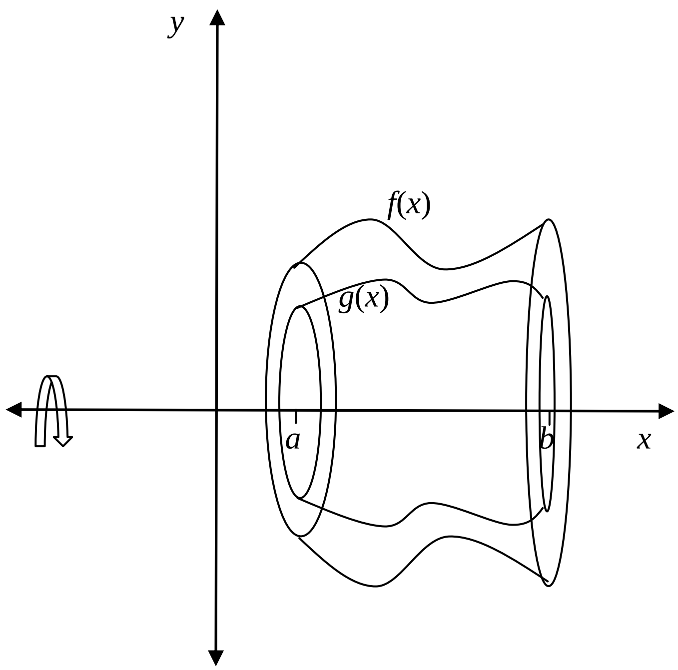
$$\pi\left(-\frac{64}{3} + 32\right) = \frac{32\pi}{3} \text{unidades de volumen.}$$

MÉTODO DE LAS ARANDELAS

Este método se emplea para el cálculo de volúmenes de revolución que tienen un “hueco”, que se produce al girar una región delimitada por dos gráficas y el eje de revolución no es parte del contorno del área plana.

Cundo el eje de revolución es el eje “*x*”

El límite superior de la región plana es la gráfica de $f(x)$ y el inferior por $g(x)$, desde $x = a$ hasta $x = b$, tal y como se ilustra en la figura adjunta.



Entonces el volumen del sólido de revolución está dado por,

$$V = \pi \int_a^b \left(\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2 \right) dx$$

Ejemplo:

Calcular el volumen del sólido de revolución determinado por rotación alrededor del eje "*x*" de la región entre las gráficas de $f(x) = x \wedge g(x) = x^2$.

Solución:

Primero se determinará la intersección entre las gráficas dadas,

$$x^2 = x$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

$$\Longrightarrow x = 0 \;\vee\; x = 1$$

Por lo tanto el intervalo de integración es,

$$[0,1]$$

Ahora falta determinar cuál es la función mayor en el intervalo dado, para esto basta con evaluar un valor entre 0 y 1, como por ejemplo $\frac{1}{2}$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ y } \; g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

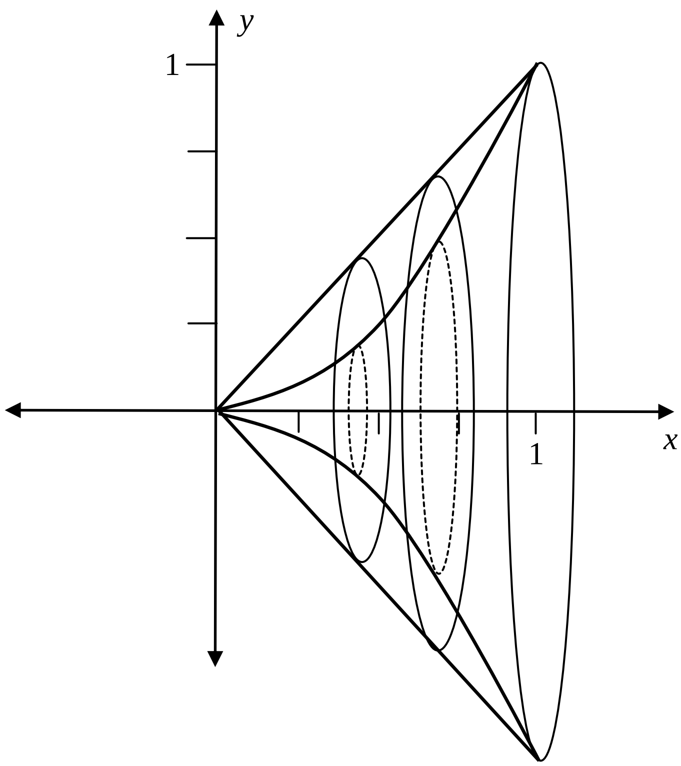
Por lo tanto $f(x) > g(x)\ \forall\, x \in\ ]0,1[$

$$V = \pi \int_0^1 \left(\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2\right) dx = \pi \int_0^1 ((x)^2 - (x^2)^2) dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 =$$

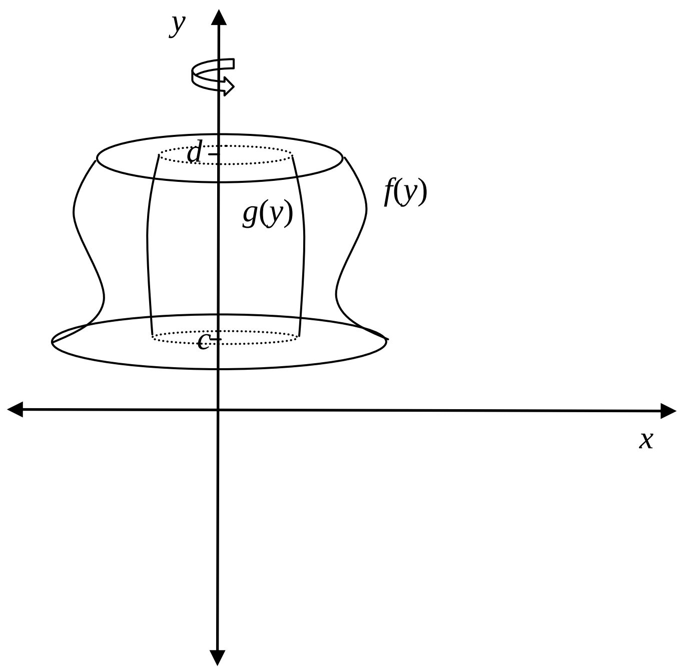
$$\pi\left(\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - (0-0)\right) = \frac{2\pi}{15} \text{ unidades de volumen}$$

En la figura adjunta se ilustra el sólido de revolución.



Cuando el eje de revolución es el eje "*y*"

El límite superior de la región plana es la gráfica de *f* (*y*) y el inferior por g (*y*), desde *y* = *c* hasta *y* = *d*, tal y como se ilustra en la figura adjunta.



Entonces el volumen del sólido de revolución está dado por,

$$V = \pi \int_c^d \left(\left(f(y)\right)^2 - \left(g(y)\right)^2 \right) dy$$

Ejemplo:

Calcular el volumen que se genera al girar la región entre las gráficas de $f(y) = y^2 - 3y \wedge g(y) = 2$ y alrededor del eje "*y*".

Solución:

Primero se determinará la intersección entre las gráficas dadas,

$$y^2 - 3y = 2$$

$$y^2 - 3y - 2 = 0$$

$$\Longrightarrow y = \frac{3-\sqrt{17}}{2} \ \vee \ y = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$$

Por lo tanto el intervalo de integración es,

$$\left[\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right]$$

Ahora falta determinar cuál es la función mayor en el intervalo dado, para esto basta con evaluar un valor entre $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$ y $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$, como por ejemplo 0.

$$f(0) = 0 \ \text{y} \ \ g(0) = 2$$

Por lo tanto $g(y) > f(y) \ \forall \ y \in \left]\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right[$

$$V = \pi \int_{\frac{3-\sqrt{17}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{17}}{2}} \left(\left(g(y)\right)^2 - \left(f(y)\right)^2\right) dy = \pi \int_{\frac{3-\sqrt{17}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{17}}{2}} ((2)^2 - (y^2 - 3y)^2) dy$$

$$= \pi \int_{\frac{3-\sqrt{17}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{17}}{2}} (4 - y^4 + 6y^3 - 9y^2) dy = \pi \left(4y - \frac{y^5}{5} + \frac{3y^6}{2} - 3y^3\right)\Bigg|_{\frac{3-\sqrt{17}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}$$

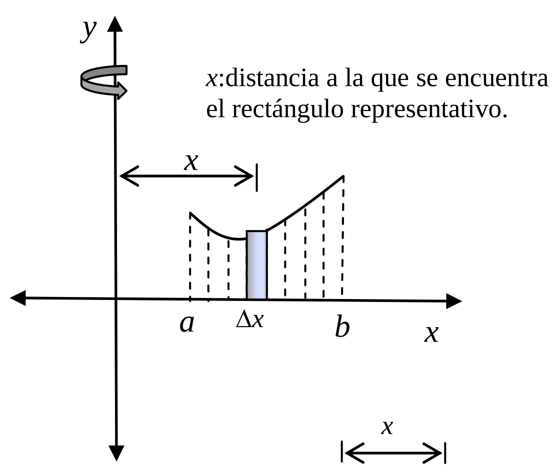
$$\approx 4378{,}617 \text{ unidades de volumen}$$

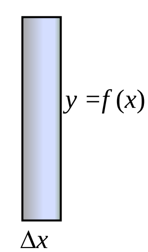
Método de Capas

Para trabajar el método de capas es conveniente que se consideren los siguientes pasos:

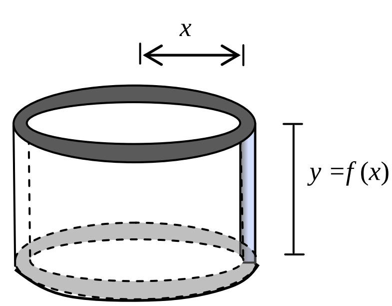
- Hacer un bosquejo del área a considerar y dibujar franjas representativas paralela al eje de revolución y el rectángulo de ancho infinitesimal.
- Escribir el volumen (circunferencia media • altura • espesor) de la capa cilíndrica generada al girar el rectángulo infinitesimal en torno al eje de revolución y sumar para los$n$ rectángulos.
- Suponer que el número de rectángulos crece indefinidamente y aplicar el teorema fundamental del cálculo.

Cuando el eje de revolución es el eje "*y*".



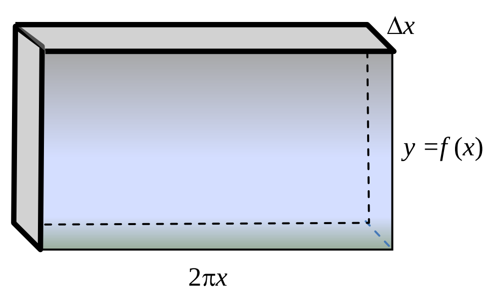


Rectángulo de
ancho infinitesimal



$$\Delta V = \underbrace{2\pi x}_{\text{largo}} \cdot \underbrace{y}_{\text{ancho}} \cdot \underbrace{\Delta x}_{\text{espesor}}$$

Capa extendida:



Por lo que el volumen está determinado por:

$$V = 2\pi \int_a^b xy\, dx = 2\pi \int_a^b xf(x)\, dx$$

Cuando el eje de revolución es un eje paralelo al "*y*" por ejemplo el *x* = *e*.

$$V = 2\pi \int_a^b (e-x)y\, dx = 2\pi \int_a^b (e-x)f(x)\, dx$$

De igual forma se procede cundo el eje de revolución es el eje "*x*".

Por lo que el volumen está determinado por:

$$V = 2\pi \int_c^d yxdy = 2\pi \int_a^b yf(y)\, dy$$

Ejemplo:

Calcular el volumen generado al girar entorno al eje *x* el área determinada por la curva $y = 2\sqrt{x}$ y el eje *x*, en el intervalo [0, 2].

Solución:

Por el método de discos,

$$V = \pi \int_0^2 \left(f(x)\right)^2 dx = \pi \int_0^2 \left(2\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^2 4x\, dx =$$

$$\pi(2x^2)\,\Big|_0^2 = 8\pi \text{ unidades de volumen.}$$

Por el método de capas

$$V = 2\pi \int_0^{2\sqrt{2}} y\left(\frac{y^2}{4}\right) dy = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{y^4}{4}\Big|_0^{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8}\cdot 64 = 8\pi\text{unidades de volumen.}$$

Ejemplo:

Calcular el volumen generado al girar entorno al eje x = 2 el área determinada por la curva $y = 2\sqrt{2x}$ y el eje x = 2, en el intervalo [0, 4].

Solución:

Por el método de discos,

$$V = \pi \int_{-4}^{4} (2-x)^2 \, dy = \underbrace{2\pi \int_0^4 \left(2 - \frac{y^2}{8}\right)^2 \, dy}_{\text{por simetría}} =$$

$$2\pi \int_0^4 \left(4 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{64}\right) dy = 2\pi \left(4y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{320}\right)_0^4 =$$

$$2\pi \left[\left(16 - \frac{32}{3} + \frac{16}{5}\right) - (0)\right] = \frac{256\pi}{15} = \text{ unidades de volumen.}$$